

Matematika III, 5. cvičení

Integrální počet funkcí dvou proměnných

Pokud lze množinu $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadat pomocí spojitě funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici (např. $x \in \langle a, b \rangle$) umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle$, pak

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Příklad 1. Vypočtete $\iint_{(0,1) \times (-1,2)} (x^2 + 2xy) \, dx \, dy$.

Výsledek. $\frac{5}{2}$.

Příklad 2. Vypočtete $\iint_{(0,1) \times (0,3)} [3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2] \, dx \, dy$.

Výsledek. 12.

Příklad 3. Vypočtete $\int_0^1 \int_{x^2}^x (2 - xy) \, dy \, dx$.

Výsledek. $\frac{7}{24}$.

Příklad 4. Vypočtete $\int_0^1 \int_0^\pi (x \sin y) \, dy \, dx$.

Výsledek. 1.

Příklad 5. Vypočtete $\int_3^4 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \, dy \, dx$. (Tip: po nějaké době rozložte na parciální zlomky.)

Výsledek. $3 \ln 2 - \ln 3$.

Příklad 6. Zaměňte pořadí integrace: $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y) \, dy \, dx$.

Výsledek. $\int_0^4 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy$.

Příklad 7. Zaměňte pořadí integrace: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x, y) \, dy \, dx$.

Výsledek. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) \, dx \, dy$.

Příklad 8. Spočítejte $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 \, dx \, dy$.

Nápověda. Protože integrál $\int \sin x^2 \, dx$ neumíme vypočítat, zaměňte nejdříve pořadí integrace a pak výsledný integrál spočítejte pomocí substituce $t = x^2$.

Výsledek. $\frac{1}{6}$.

Příklad 9. Spočítejte $I = \iint_M 8y \, dx \, dy$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, xy \geq 1, x + y \leq \frac{5}{2}\}$.

Nápověda. $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 8y \, dy \, dx$.

Výsledek. $\frac{9}{2}$.

Příklad 10. Spočítejte $\iint_S xy^2 \, dx \, dy$, kde S je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Výsledek. $\frac{1}{40}$.

Příklad 11. Spočítejte $\iint_A x^3 y \, dx \, dy$, kde A je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^3$.

Výsledek. $\frac{1}{30}$.