Matematika III, 4. cvičení

Derivace funkce zadané implicitně

Funkci značíme písmenem y, proměnnou písmenem x, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace x je 1, ale derivace y je y', takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

Příklad 1. *Určete první a druhou derivaci, pokud* $x^2 + y^2 = 1$.

Příklad 2. *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

Příklad 3. *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

Příklad 4. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[1, 1]$ *implicitně rovnicí* $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. *Určete* $y'(1)$ *a* $y''(1)$.

Příklad 5. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *implicitně rovnicí* $y - \frac{\sin y}{2} = x$. *Určete* $y'(\frac{\pi-1}{2})$ *a* $y''(\frac{\pi-1}{2})$.

Příklad 6. *Rozhodněte, zda křivka* $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, -1]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Nápověda. Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za funkci $y(x)$ zadanou implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.

Příklad 7. *Rozhodněte, zda křivka* $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, 3]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Příklad 8. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[1, \sqrt{2}, 2]$ *funkce* $z = f(x, y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.

Příklad 9. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[-2, 0, 1]$ *funkce* $z = f(x, y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Implicitně zadaná funkce

Nechť $F(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, dále $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu x_0, přičemž $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Funkce $y = f(x)$ je tedy rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definovaná v okolí bodu x_0. Pokud $F'_y(x_0, y_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.
Podobné tvrzení platí pro funkci více proměnných, uvedeme si ještě případ pro 3 proměnné: Nechť $F(x, y, z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$, dále $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu $[x_0, y_0]$, přičemž $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Pokud $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

Příklad 10. *V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu* h *o rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nelze vyjádřit z *jako funkci* $z = f(x, y)$*?*

Nápověda. Určete body $[x_0, y_0, z_0]$ na h splňující $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, kde $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$.

Příklad 11. *V okolí kterých bodů křivky* $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$ *nelze vyjádřit* y *jako funkci* $y = f(x)$*?*

Příklad 12. *V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy* $z^2 - 2px = 0$*, kde* $p > 0$*, nelze vyjádřit* z *jako funkci* $z = f(x, y)$*?*