Zadání cvičení pro 1. týden: 17.-21.9. 2018

Cílem prvního cvičení je zvyknout si na více proměnných ve výrazech pro funkci a na popis objektů v rovině a prostoru. V úvodu si připomeňte, že derivovat nebo integrovat podle jedné z proměnných (a považovat ostatní za konstantní parametry) není problém.

Připomeňte základní "topologické"koncepty (okolí bodu, uzavřené, otevřené, kompaktní množiny, limity).

Příklad. 1. *Řešte systémy nerovnic, nakreslete si příslušné oblasti v rovině.*

(a)

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq \frac{1}{x}$$

(b)

$$y \leq \arctan x, \quad y \leq \frac{1}{x^2}$$

(c)

$$x^2 + (y-1)^2 \geq 4, \quad y + x^2 - 2x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Poznámka. U nerovnice $f(x,y) \geq 0$ se soustřeďte se na vymezení hranic oblastí v rovině pomocí rovnice $f(x,y) = 0$. Uvnitř každé z nich pak pro spojitou f máte stejné znaménko hodnot.

Příklad. 2. *Určete definiční obor funcke $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

a)

$$\frac{xy}{y(x^3 + x^2 + x + 1)},$$

b)

$$\ln(x^2 - y^2),$$

c)

$$\ln(-x^2 - y^2),$$

d)

$$\arcsin(2\chi_{\mathbb{Q}}(x)),$$

kde $\chi_{\mathbb{Q}}$ je charakteristická funce množiny racionálních čísel,

e)

$$f(x,y,z) = \sqrt{\ln x \cdot \arcsin(y^2 z)}.$$

a zkuste si některé z nich zderivovat podle jednotlivých proměnných (co taková derivace znamená)?

Poznámka. Definiční obor by měl být součástí každé definice funkce. Pro "týrání"studentů se ale často místo toho napíše výraz a zkoumá se, jaký je "maximální"definiční obor, kde má tento výraz smysl.

Při počítání limit funkcí více proměnných nemáme k dispozici mnoho nástrojů (jako např. L'Hospitalovo pravidlo). Platí ale pravidlo, že limita existuje, jen když pro jakoukoliv posloupnost argumentů konvergujících k příslušnému hromadnému bodu definičního oboru je limita hodnot funkce v nich vždy tatáž (a zejména tedy existuje). Neexistence se tak většinou snadno dokáže tak, že v různých směrech přibližování dostáváme různé limity. Je také často vhodné změnit systém souřadnic.

Připomeňte, že spojitost znamená existence limity, která je rovna hodnotě. Vyberte si několik z následujících příkladů.

Příklad. 3. *Najděte* $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$

(limita exstuje a je rovná 2)

$\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

(faktorizací jmenovatele zjistíme, že je to $\frac{1}{4}$*)*

$\lim_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$

(limita je 0)

$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$

(roznásobte zlomek a použijte substituci $t = xy$ *(tj. počítáme s* $t \to 0$*), vyjde 2)*

$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

(zkuste v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$*,* $(x,y) \to (\infty,\infty)$*, tj.* $r \to \infty, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$*, vyjde 0)*

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

(použijte různé křivky v rovině, např. $y = 1 - e^x$ *a* $y = x$ *s různými limitami – limita neexistuje.)*

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(opět v polárních souřadnicích se snadno vidí, že limita neexistuje)

$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{2x+xy-y-2}{x^2+y^2-2x+4y+5}$

(Přímky bodem $[1,-2]$ *jsou* $y = kx - k - 2$ *a podél nich dostáváme růné limity – neexistuje)*

Příklad. 4. *Najděte body nespojitosti funkcí*

$f(x,y) = \frac{2x-5y}{x^2+y^2-1}$.

(Celá kružnice o poloměru 1 se středem v počátku)

$f(x,y) = \frac{\sin(x^2y+xy^2)}{\cos(x-y)}$.

(Množina $\{[x, x + (2k+1)\frac{\pi}{2}]; x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$*)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

(funkce je spojitá všude)