Matematika III, 4. cvičení

Funkce zadané implicitně, jejich derivace, vázané extrémy

Funkci značíme písmenem y, proměnnou písmenem x, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace x je 1, ale derivace y je y', takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

Nechť $F(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, dále $F(x_0, y_0) = 0$ a $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje spojitě diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu x_0, přičemž $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Funkce $y = f(x)$ je tedy rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definovaná v okolí bodu x_0. Pokud $F_y(x_0, y_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi neexistuje (pokud existuje inverzní zobrazení, jeho konečná derivace existovat nemůže).
Podobné tvrzení platí pro funkce více proměnných. Např. pro 3 proměnné:
Nechť $F(x, y, z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$, dále $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pak existuje spojitě diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu $[x_0, y_0]$, přičemž $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Pokud $F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

Na množině M implicitně zadané jednou rovnicí $F = 0$ lze přímočaře hledat extrémy jiné funkce f. Gradienty funkcí F a f musí být v takových bodech kolineární.

Z příkladů si zvolte alespoň jeden ze všech typů.

Příklad 1. *Určete první a druhou derivaci implicitně zadané funkce $y = f(x)$ splňující $x^2+y^2 = 1$. Najděte její lokální extrémy.*

Řešení. Po zderivování obou stran máme $2x + 2yy' = 0$, z toho $y' = -\frac{x}{y}$. První rovnost je ekvivalentní s rovností $x + yy' = 0$, po zderivování dostaneme $1 + (y')^2 + yy'' = 0$. Tedy

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + x^2/y^2}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Výsledek. $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$. Extrémy jsou pro $x = 0$ maximum nebo minimum, podle toho, kterou volíme větev řešení.

Příklad 2. *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.

Příklad 3. *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.

Příklad 4. *Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně rovnicí $y^3-2xy+x^2 = 0$. Určete $y'(1)$ a $y''(1)$.*

Výsledek. $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

Příklad 5. *Rozhodněte, zda křivka $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, -1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Nápověda. Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za funkci $y(x)$ zadanou implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.

Výsledek. $y''(1) = 16 > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Příklad 6. *Rozhodněte, zda křivka* $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ *leží v okolí bodu* $[1,3]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Výsledek. $y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Příklad 7. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[1, \sqrt{2}, 2]$ *funkce* $z = f(x,y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.

Výsledek. $z'_x(1,\sqrt{2}) = \frac{z-2x}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z'_y(1,\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}z-2y}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z''_{xx}(1,\sqrt{2}) = z''_{yy}(1,\sqrt{2}) = -2$, $z''_{xy}(1,\sqrt{2}) = 0$.

Příklad 8. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[-2,0,1]$ *funkce* $z = f(x,y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Výsledek. $z'_x(-2,0) = -\frac{4x+8z}{8x+2z-1} = 0$, $z'_y(-2,0) = -\frac{4y}{8x+2z-1} = 0$, $z''_{xx}(-2,0) = z''_{yy}(-2,0) = \frac{4}{15}$, $z''_{xy}(-2,0) = 0$.

Příklad 9. *V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu* h *o rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nelze vyjádřit z *jako funkci* $z = f(x,y)$*?*

Nápověda. Určete body $[x_0, y_0, z_0]$ na h splňující $F'_z(x_0,y_0,z_0) = 0$, kde $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$.

Výsledek. Množina hledaných bodů je elipsa obsahující body $[x_0, y_0, 0]$, kde $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Příklad 10. *V okolí kterých bodů křivky* $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$ *nelze vyjádřit* y *jako funkci* $y = f(x)$*?*

Výsledek. $[2,2], [-2,-2]$.

Příklad 11. *V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy* $z^2 - 2px = 0$*, kde* $p > 0$*, nelze vyjádřit* z *jako funkci* $z = f(x,y)$*?*

Výsledek. Všechny body osy y.

Příklad 12. *Najděte extrémy funkce* $f(x,y) = x - y$ *na elipse* $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$.

Výsledek. Extrém musí nastat ve stacionárním bodě, ty musí mít vlastnost, že gradienty f a F jsou kolineární. Vyjdou body $[x,y]$ s $x = \pm 2$, $y = - \pm 1$ (jedno minimum, jedno maximum).