Třetí dobrovolný domácí úkol

1. U následujících množin a operací doplňte na prázdná místa do tabulky:

   - písmeno „M“, pokud množina s danou operací tvoří monoid, ale ne grupu,
   - písmeno „G“, pokud množina s danou operací tvoří grupu.

   Přitom „+“ značí standardní sčítání a „·“ standardní násobení. Křížky v tabulce znamenají, že se v daném případě nejedná o monoid (a toto již bylo obsahem 1. domácího úkolu).

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_5^\times$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$	$\mathbb{GL}_2(\mathbb{R})$
$+$	$\times$						$\times$	$\times$	$\times$			$\times$
$\cdot$											$\times$	

2. Rozhodněte, zda množina $G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 5b^2 = 1\}$ spolu s předpisem, definovaným pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ jako

   $$(a, b) \circ (c, d) = (ac + 5bd, ad + bc),$$

   tvoří grupu (případně komutativní grupu). Změní se nějak odpověď, když místo podmínky $a^2 - 5b^2 = 1$ uvážíme podmínku $a^2 - 5b^2 \geq 1$?

3. Rozhodněte, zda množina $\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 > 0\}$ je podgrupou grupy $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ nenulových komplexních čísel s operací násobení.

4. Dejte příklad surjektivního homomorfismu monoidů $\varphi\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, \cdot)$, kde symbol „+“ značí standardní sčítání a symbol „·“ standardní násobení. Pokud takový neexistuje, zdůvodněte proč.