Ukázka podrobného řešení

úlohy 2 z DDU9

- Oba dané předpisy jsou skutečně operacemi na množině $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, neboť každá jejich složka vznikla skládáním sčítání a násobení, což jsou v obou případech korektně definované operace na množině $\mathbb{Q}$.

- Pro všechna $x, y, u, v, w, z \in \mathbb{Q}$ platí

$$(x, y) * ((u, v) * (w, z)) = (x, y) * (u + w, v + z) = (x + u + w, y + v + z),$$
$$((x, y) * (u, v)) * (w, z) = (x + u, y + v) * (w, z) = (x + u + w, y + v + z).$$

  Dva výše uvedené výrazy se rovnají, tedy operace $*$ je asociativní. Ze vztahů

$$(x, y) * ((u, v) \diamond (w, z)) = (x, y) \diamond (uw + 2vz, uz + vw) =$$
$$= (xuw + 2xvz + 2yuz + 2yvw, xuz + xvw + yuw + 2yvz),$$

$$((x, y) \diamond (u, v)) \diamond (w, z) = (xu + 2yv, xv + yu) \diamond (w, z) =$$
$$= (xuw + 2yvw + 2xvz + 2yuz, xuz + 2yvz + xvw + yuw),$$

  dostáváme, že i $\diamond$ je asociativní.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $(x, y) * (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = (0, 0) * (x, y)$, tedy dvojice $(0, 0)$ je neutrálním prvkem vzhledem operaci $*$.

  Pokud je (e, f) neutrální prvek vzhledem k operaci $\diamond$, musí splňovat $\forall (x, y)$: $(x, y) * (e, f) = (e, f) * (x, y) = (x, y)$, tedy musí platit

$$xe + 2yf = x, \;\; xf + ye = y.$$

  Toto splňuje dvojice $(e, f) = (1, 0)$.

- Inverze k prvku (x, y), vzhledem k operaci $*$ je prvek $(-x, -y)$, protože platí $(x, y) * (-x, -y) = (0, 0) = (-x, -y) * (x, y)$. Teď už víme, že se jedná o okruh.

- $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $(x, y) \diamond (u, v) = (u, v) \diamond (x, y)$, okruh je tedy dokonce komutativní.

- Pokud k prvku $(x, y) \neq (0, 0)$ existuje inverze (u, v) vzhledem k operaci $\diamond$, musí splnit $xu + 2yv = 1, \;\; xv + yu = 0$. Z druhé rovnice dostáváme $u = -\frac{xv}{y}$ pro $y \neq 0$. Pak $-\frac{x^2 v}{y} + 2yv = 1 \Longrightarrow v(2y - \frac{x^2}{y}) = 1 \Longrightarrow v = \frac{y}{2y^2 - x^2} \Longrightarrow u = \frac{-x}{2y^2 - x^2}$. Protože $\diamond$ je komutativní, je nalezená dvojice $(\frac{-x}{2y^2 - x^2}, \frac{y}{2y^2 - x^2})$ skutečně inverzí k (x, y). Nikdy nemůže nastat $2y^2 - x^2 = 0$, neboť by to znamenalo $x = \pm\sqrt{2}y$, což nemůže platit pro $x, y \in \mathbb{Q}$.

- Okruh je také zřejmě netriviální a dohromady s předchozími dvěma odrážkami vidíme, že je tělesem (a tedy i oborem integrity).