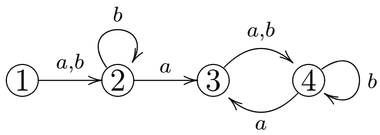
Algebra I – podzim 2015 – 5. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpisy $a * b = a + b - 1$ a $a \diamond b = a + b - ab$, pro $a, b \in \mathbb{R}$, definují operace na množině $\mathbb{R}$ takové, že $(\mathbb{R}, *, \diamond)$ je okruh, případně těleso.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & g \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f, g, h \in \mathbb{R}[x],\ f \text{ má kořen } 1,\ h \text{ má kořen } 2 \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & g \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid f = h,\ g \text{ má kořeny 1 a 2} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Rozložte polynom $x^7 - x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 2$ na součin nerozložitelných polynomů nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$, víte-li, že má kořen $\sqrt[3]{2}$.

5. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$ nad $\mathbb{Q}$.

6. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\sqrt[4]{27} - \sqrt{3} + \sqrt[4]{3} - 2}$ bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

7. **(5 bodů)** Dejte příklad dvou homomorfismů grup $\varphi, \psi \colon G \to H$, které mají stejné jádro, ale $\varphi(G) \ncong \psi(G)$. Pokud takové homomorfismy neexistují, zdůvodněte proč.

8. **(5 bodů)** Dejte příklad monoidu, který je generovaný jedním prvkem, a jeho podmonoidu, který jedním prvkem generovaný není. Pokud takový monoid neexistuje, zdůvodněte proč.

9. **(5 bodů)** Dejte příklad grupy, která obsahuje šestiprvkovou podgrupu H a desetiprvkovou podgrupu K takové, že $|H \cap K| = 2$. Pokud taková grupa neexistuje, zdůvodněte proč.

10. **(5 bodů)** Definujte podílové těleso oboru integrity.

11. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující všechna konečná tělesa.

12. **(5 bodů)** Dokažte, že průnik libovolně mnoha ideálů daného okruhu je opět jeho ideálem.