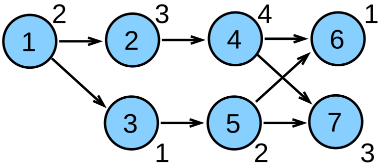
PB165 Grafy a sítě: Plánování projektu, plánování pomocí barvení grafu

Obsah

1. Plánování projektu
   - Neomezené zdroje
   - Variabilní doba trvání
2. Barvení grafu
   - Popis problému a jednoduché řešení
   - Přiřazení místností
   - Rezervační problém
   - Rozvrhování operátorů

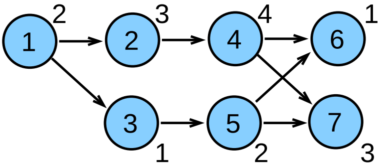
Plánování projektu

- Základní problém plánování projektu
  - precedenční podmínky
  - paralelní stroj s neomezeným počtem strojů
  - minimalizace maximálního času konce úloh *(makespan)*
  - relativně jednoduché na řešení: metoda kritické (nejdelší) cesty
    princip: nalezneme kritickou cestu a ta určuje makespan



Plánování projektu

- Základní problém plánování projektu
  - precedenční podmínky
  - paralelní stroj s neomezeným počtem strojů
  - minimalizace maximálního času konce úloh *(makespan)*
  - relativně jednoduché na řešení: metoda kritické (nejdelší) cesty
    princip: nalezneme kritickou cestu a ta určuje makespan



- Rozšíření: variabilní doba trvání
  - doba trvání úlohy spojena s cenou provádění
  - optimalizace: kompromis mezi cenou na ukončení projektu a cenou za zkrácení délky úloh

Popis problému

- Popis problému
  - paralelních stroj
  - n úloh s precedenčními omezeními
  - doba provádění p_j
  - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh *(makespan)*

Základní problém s neomezenými zdroji

$P_\infty|prec|C_{max}$ $m \geq n$ metoda kritické cesty

Plánování projektu s omezenými zdroji

$P_m|prec|C_{max}$ $2 \leq m < n$ NP úplný problém

Popis problému

- Popis problému
  - paralelních stroj
  - n úloh s precedenčními omezeními
  - doba provádění p_j
  - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh *(makespan)*

  Základní problém s neomezenými zdroji

  $P_\infty | prec | C_{max}$ $m \geq n$ metoda kritické cesty

  Plánování projektu s omezenými zdroji

  $P_m | prec | C_{max}$ $2 \leq m < n$ NP úplný problém

- Značení
  - S'_j nejdřívější startovní čas úlohy j
    $C'_j = S'_j + p_j$ nejdřívější koncový úlohy j
  - S''_j nejpozdější startovní čas úlohy j
    C''_j nejpozdější koncový čas úlohy j
  - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy j
    $\forall k \in Prec_j$ všechny úlohy k, které předcházejí úlohu j
    $\forall j : k \in Prec_j$ všechny úlohy j, které následují úlohu k

Metoda kritické cesty (*critical path method CPM*)

- Popis algoritmu pro nalezení kritických cest
  - dopředná procedura
    - start v čase 0
    - výpočet nejdřívějšího startovního času každé úlohy
    - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*

Metoda kritické cesty (*critical path method CPM*)

- Popis algoritmu pro nalezení kritických cest
  - dopředná procedura
    - start v čase 0
    - výpočet nejdřívějšího startovního času každé úlohy
    - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
  - zpětná procedura
    - start v čase rovném *makespan*
    - výpočet nejpozdějšího startovního času, aby byl realizován tento *makespan*

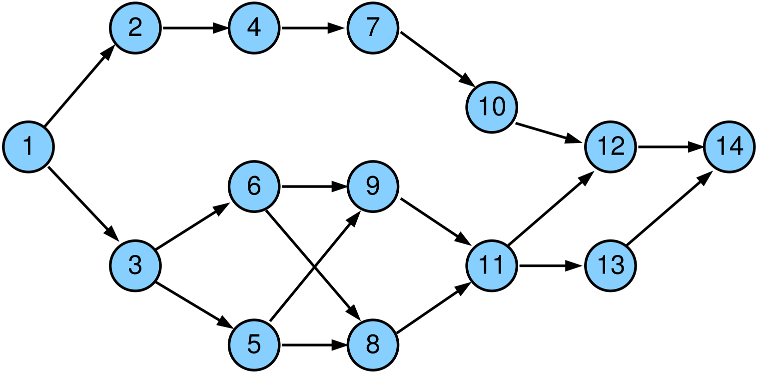
Metoda kritické cesty (*critical path method CPM*)

- Popis algoritmu pro nalezení kritických cest
  - dopředná procedura
    - start v čase 0
    - výpočet nejdřívějšího startovního času každé úlohy
    - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
  - zpětná procedura
    - start v čase rovném *makespan*
    - výpočet nejpozdějšího startovního času, aby byl realizován tento *makespan*
- Úloha s rezervou *(slack job)*
  - její startovní čas může být odložen aniž je navýšen *makespan*
  - úloha j, jejichž nejdřívější startovní čas S'_j je menší než nejpozdější startovní čas S''_j
  - rezerva úlohy j: $S''_j - S'_j$
- Kritická úloha
  - úloha, která nesmí být odložena
  - úloha, jejíž nejdřívější startovní čas je roven nejpozdějšímu start. času
- Kritická cesta
  - řetěz úloh začínající v čase 0 a končící v čase C_{max}
  - v grafu může existovat více kritických cest
    kritické cesty se mohou částečně překrývat
  - graf kritických cest G_{CP}: podgraf daný množinou kritických úloh a kritických cest

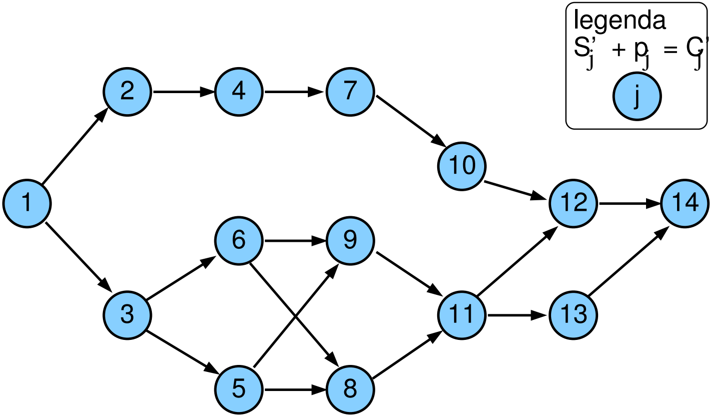
Cvičení: Jaký je rozdíl mezi kritickou cestou a grafem kritických cest? Ukažte rozdíl na příkladu.

Kritická cesta: zadání příkladu

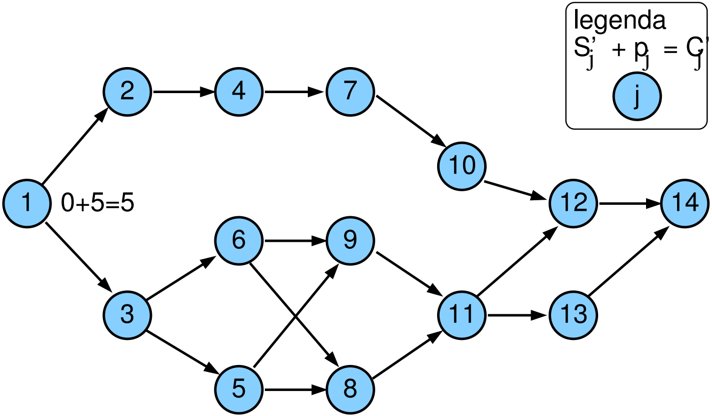
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5



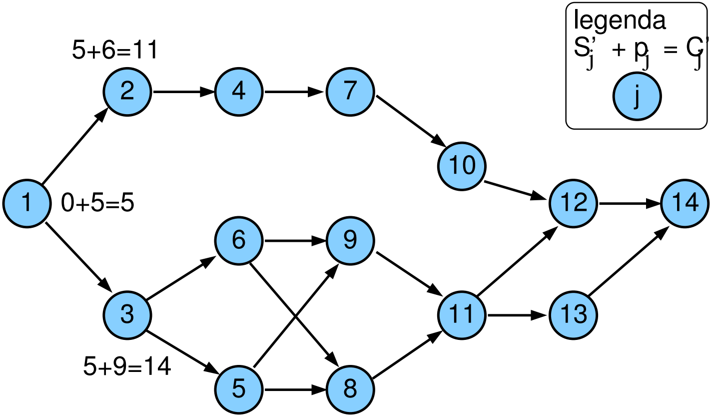
Příklad: dopředná procedura



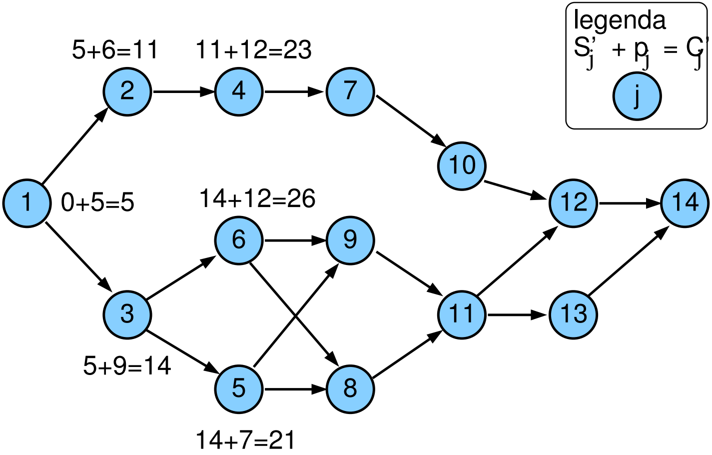
Příklad: dopředná procedura



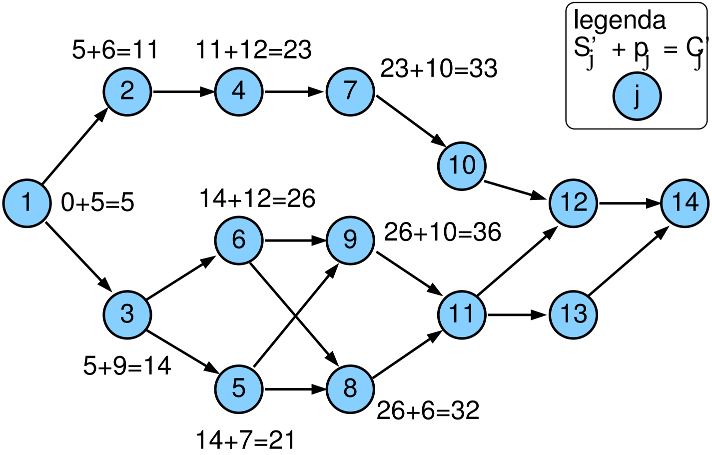
Příklad: dopředná procedura



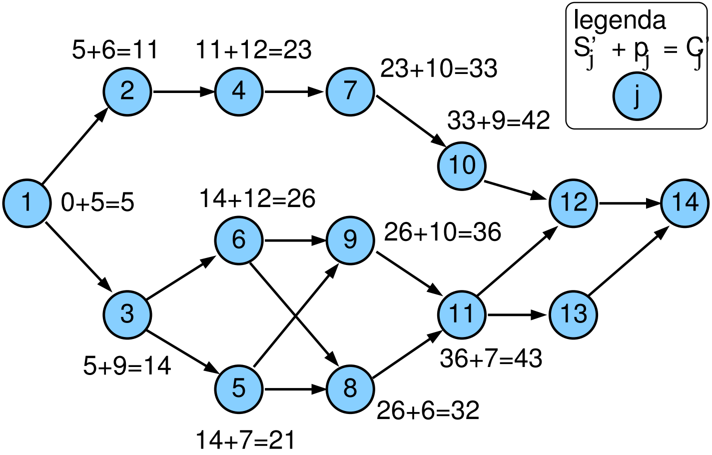
Příklad: dopředná procedura



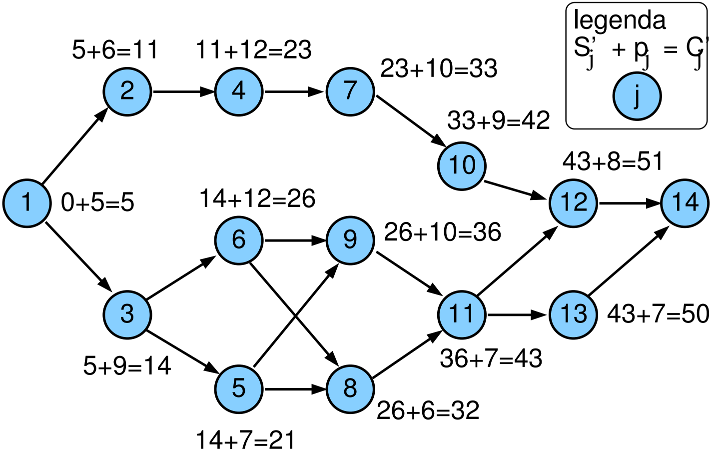
Příklad: dopředná procedura



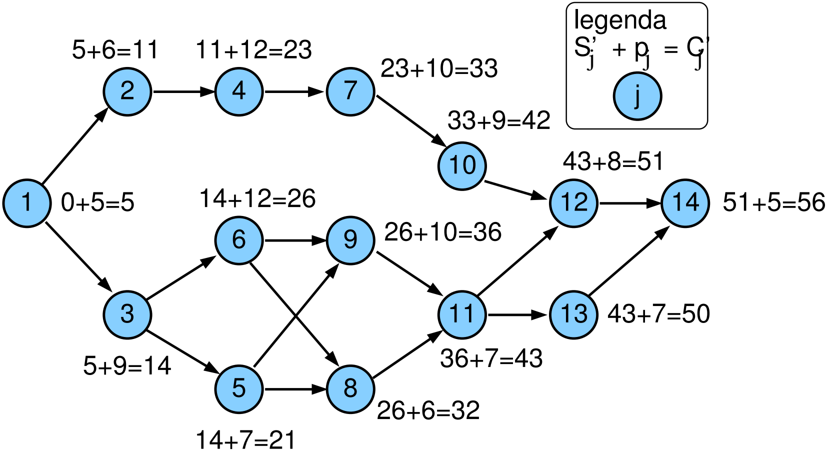
Příklad: dopředná procedura



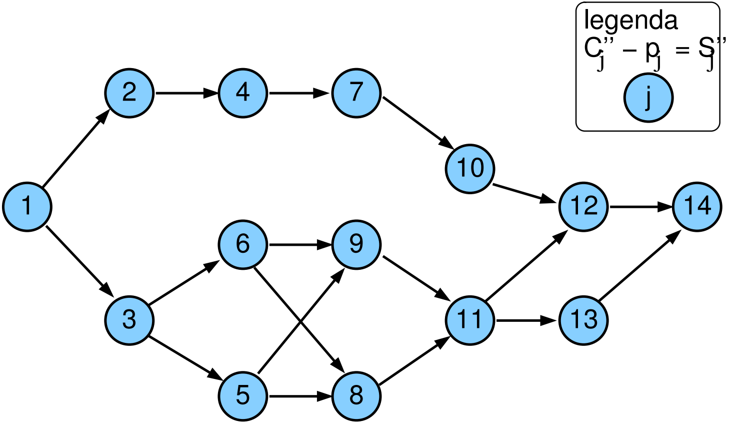
Příklad: dopředná procedura



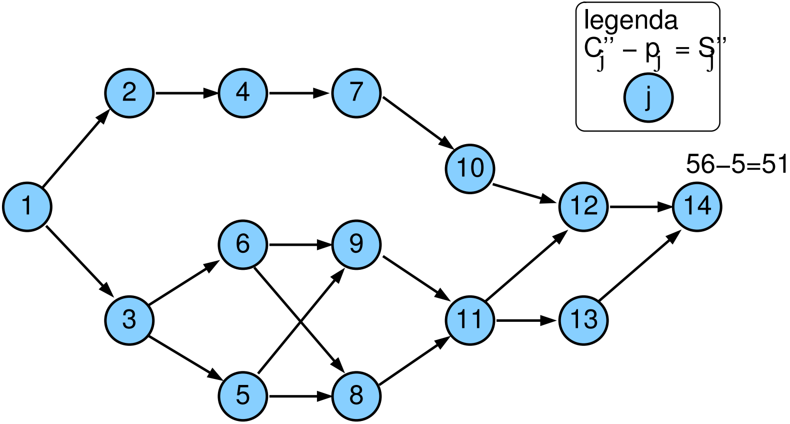
Příklad: dopředná procedura



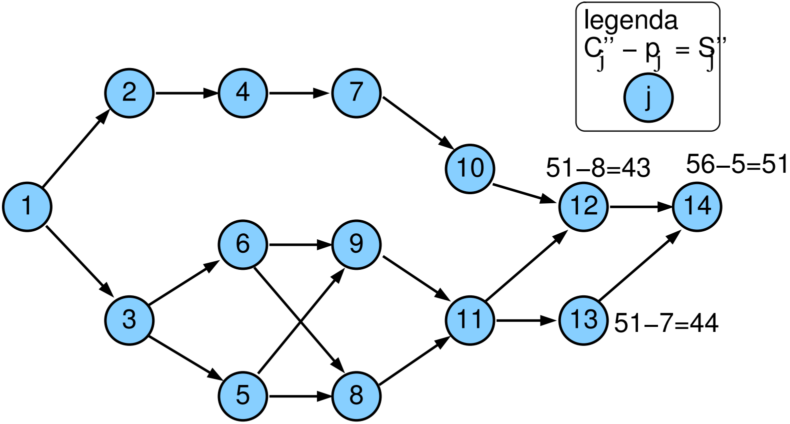
Příklad: zpětná procedura



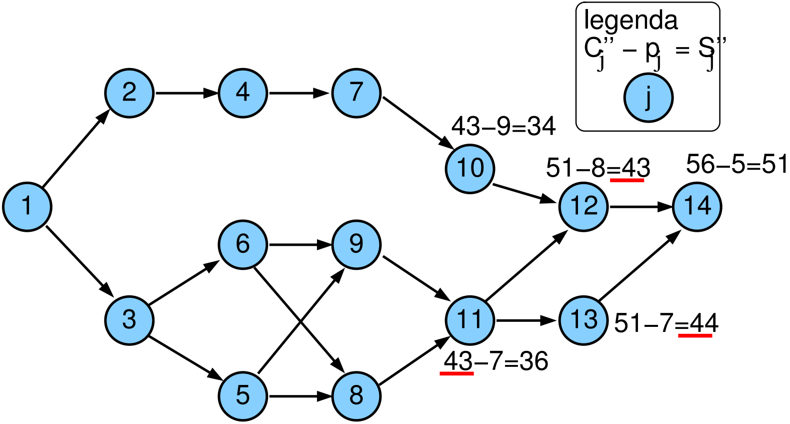
Příklad: zpětná procedura



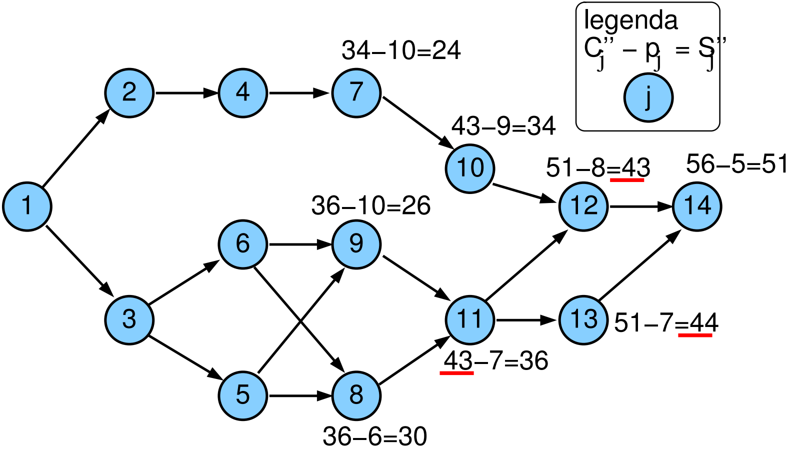
Příklad: zpětná procedura



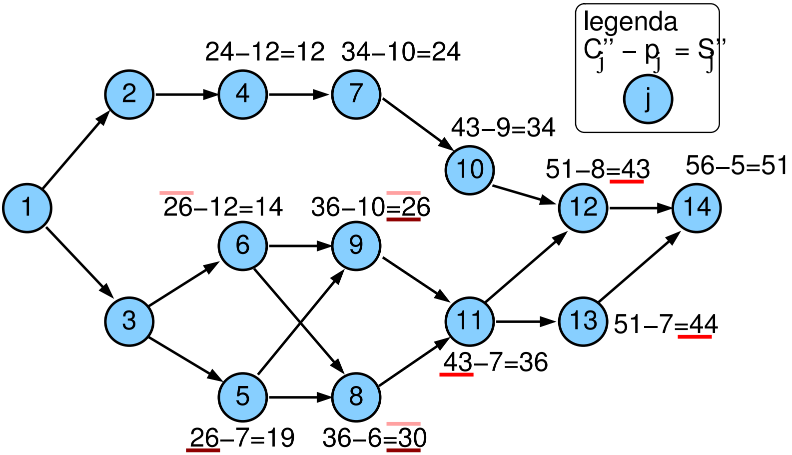
Příklad: zpětná procedura



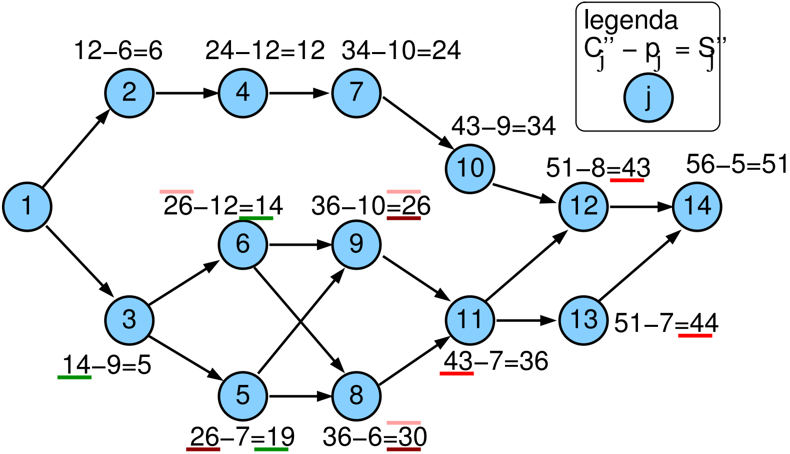
Příklad: zpětná procedura



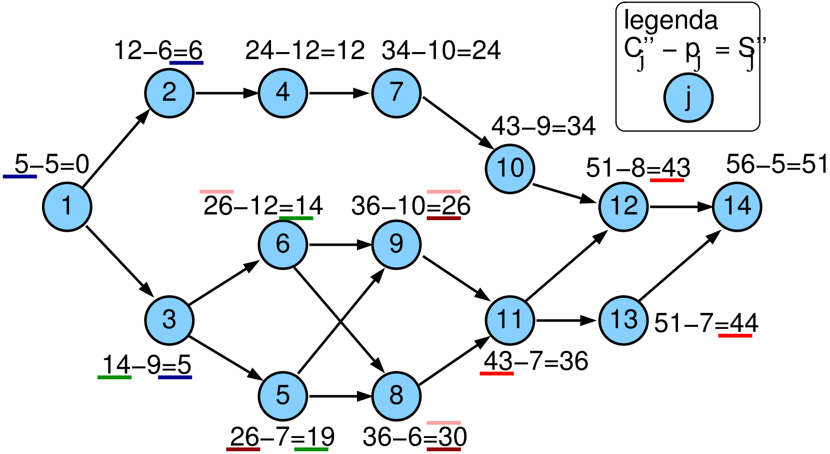
Příklad: zpětná procedura



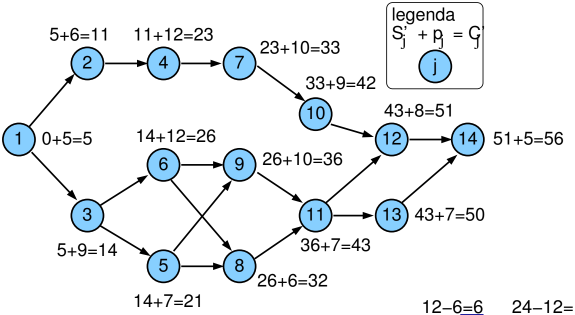
Příklad: zpětná procedura

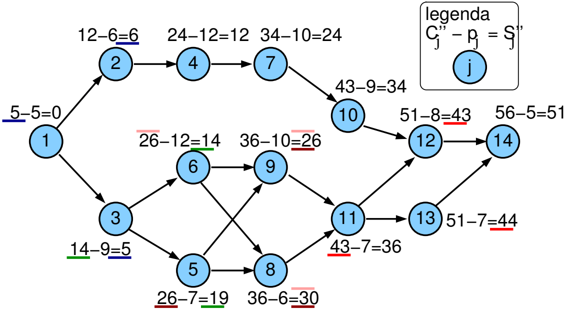


Příklad: zpětná procedura

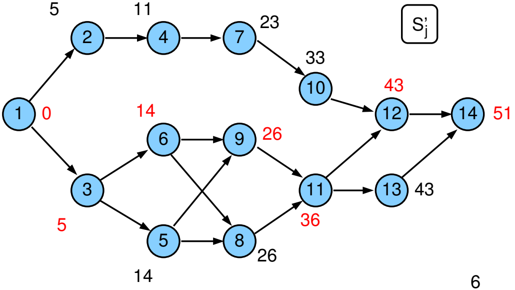


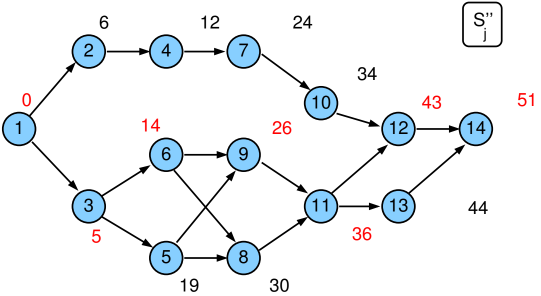
Výsledky dopředné a zpětné procedury



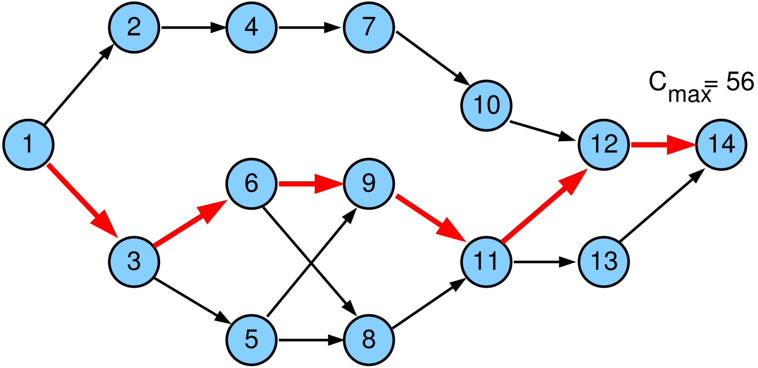


Porovnání S'$_j$ a S''$_j$



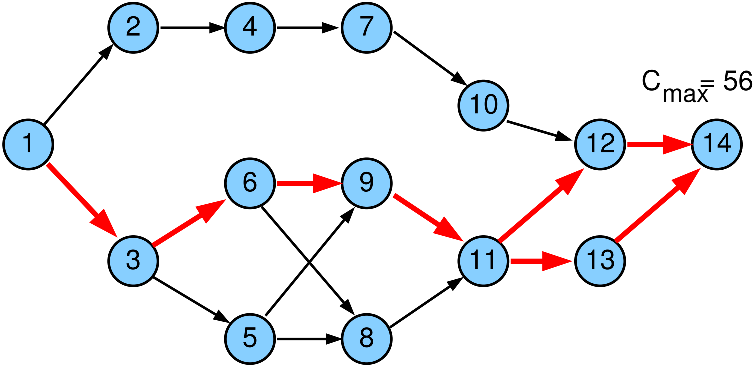


Kritická cesta



Graf kritických cest G_{CP}

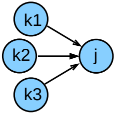
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	**8**	5



- G_{CP}: dvě kritické cesty {1,3,6,9,11,**12**,14}, {1,3,6,9,11,**13**,14}, které se částečně překrývají

Metoda kritické cesty

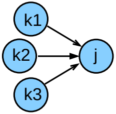
1. Dopředná procedura
   1. $t = 0$
   2. pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
   3. vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:



$$S'_j = \max_{\forall k \in \boldsymbol{Prec_j}} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

Metoda kritické cesty

1. Dopředná procedura
   1. $t = 0$
   2. pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
   3. vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:

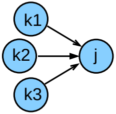


$$S'_j = \max_{\forall k \in Prec_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

   4. optimální *makespan* je $C_{max} = \max(C'_1, \ldots, C'_n)$

Metoda kritické cesty

1. Dopředná procedura
   1. $t = 0$
   2. pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
   3. vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:

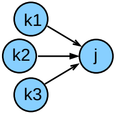


$$S'_j = \max_{\forall k \in Prec_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

   4. optimální *makespan* je $C_{max} = \max(C'_1, \ldots, C'_n)$
2. Zpětná procedura
   - $t = C_{max}$
   - pro všechny úlohy j bez následníka: $C''_j = C_{max}, S''_j = C_{max} - p_j$

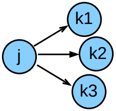
Metoda kritické cesty

1. Dopředná procedura
   1. $t = 0$
   2. pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
   3. vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:



$$S'_j = \max_{\forall k \in Prec_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

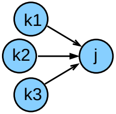
   4. optimální *makespan* je $C_{max} = \max(C'_1, \dots, C'_n)$
2. Zpětná procedura
   - $t = C_{max}$
   - pro všechny úlohy j bez následníka: $C''_j = C_{max}, S''_j = C_{max} - p_j$
   - vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:



$$C''_j = \min_{\forall k : j \in Prec_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

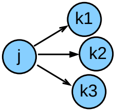
Metoda kritické cesty

1. Dopředná procedura
   1. $t = 0$
   2. pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
   3. vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:



$$S'_j = \max_{\forall k \in Prec_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

   4. optimální *makespan* je $C_{max} = \max(C'_1, \ldots, C'_n)$
2. Zpětná procedura
   - $t = C_{max}$
   - pro všechny úlohy j bez následníka: $C''_j = C_{max}, S''_j = C_{max} - p_j$
   - vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j:



$$C''_j = \min_{\forall k: j \in Prec_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

   - ověř, že $0 = \min(S''_1, \ldots, S''_n)$

Cvičení

1. Jaká je grafová reprezentace rozvrhovacího problému zadaného tabulkou:

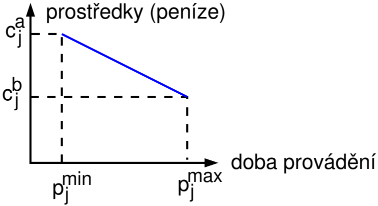
úloha	doba trvání	předchůdci
1	1	-
2	2	1
3	3	1
4	4	2,5,6
5	5	1,2
6	2	3
7	4	-
8	1	7,9
9	5	4
10	2	8

2. Nalezeněte graf kritických cest v tomto grafu.
3. Jaký má tento rozvrh makespan?
4. Existují v problému úlohy s rezervou? Pokud ano, uveďte o které úlohy se jedná. Jakou mají tyto úlohy rezervu?

Kompromis mezi časem a cenou

- Lze uvažovat variabilní dobu trvání úloh
  - za předpokladu vyšší ceny lze zkrátit dobu provádění
- Lineární cena
- Doba trvání $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$
- Marginální cena: cena za zkrácení doby trvání úlohy o 1 časovou jednotku

$$c_j = \frac{c_j^a - c_j^b}{p_j^{max} - p_j^{min}}$$



$\Rightarrow$ cena provádění úlohy j po dobu p_j: $c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)$

Cena za provádění projektu

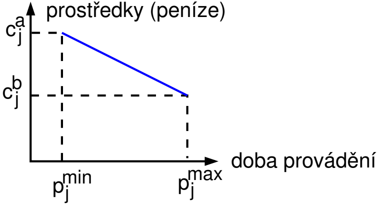
- Fixní režijní náklady c_0 celkem: $C_{\max} c_0$

  na časovou jednotku doby provádění projektu
- Cena $F(p_j)$ za provádění projektu
  - při době provádění úloh p_j

  určena jako součet
  - ceny za provádění všech úloh
  - fixních režijních nákladů

$$F(p_j) = C_{\max} c_0 + \sum_j \left(c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)\right)$$

- Cíl: $\forall j$ nalézt p_j a S_j tak, aby byla $F(p_j)$ minimální



Variabilní doba trvání: metody řešení

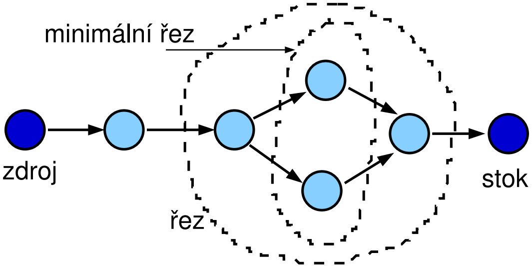
- Objektivní funkce: minimální cena projektu
- Kompromisní heuristika mezi časem a cenou
  - dobrá kvalita rozvrhu
  - použitené i pro nelineární cenu
- Další přístupy: formulace lineárního programování
  - systém lineárních nerovnic s lineárním optimalizačním kritériem
  - simplexová metoda
  - optimální rozvrh
  - nelineární verze obtížně řešitelné

Řez, minimální řez

- Orientovaný graf $G = (V, E)$
- Počáteční uzel: zdroj $s \in V$
- Koncový uzel: stok $t \in V$

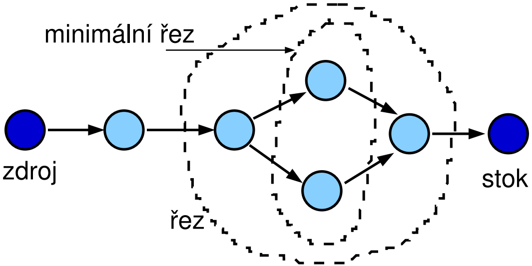
- Řez ze zdroje s do stoku t: ... také mluvíme o vrcholovém řezu
  množina uzlů V', jejíž smazáním z grafu se rozpojí zdroj a stok
  - E' množina hran incidentních s V'

  tj. v G'=(V-V',E-E') neexistuje orientovaná cesta z s to t
- Minimální řez z s do t: řez U takový, že neexistuje řez $W \subset U$
  - tj. vrácení libovolného uzlu z U do grafu znovu spojí zdroj a stok



Řez, minimální řez II.

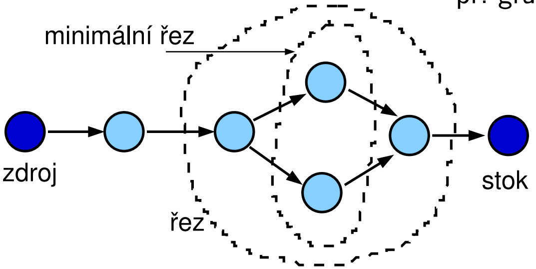
- Uvažujme orientovaný graf $G_0 = (V_0, E_0)$
- Do grafu přidáme zdroj:
  - nový vrchol s a
  - hrany S vedoucí z s do všech vrcholů G_0 bez předchůdců
- Do grafu přidáme stok:
  - nový vrchol t a
  - hrany T vedoucí ze všech vrcholů G_0 bez následníků do t
- Nový graf $G = (V, E)$: $\quad V = V_0 \cup \{s, t\}, \quad E = E_0 \cup S \cup T$
- Budeme hledat řezy a minimální řezy z s do t v G



Řez, minimální řez II.

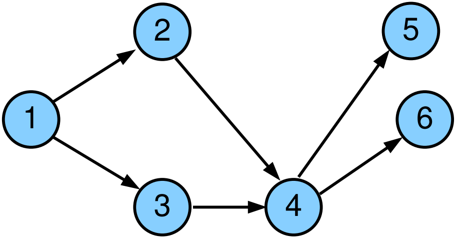
- Uvažujme orientovaný graf $G_0 = (V_0, E_0)$
- Do grafu přidáme zdroj:
  - nový vrchol s a
  - hrany S vedoucí z s do všech vrcholů G_0 bez předchůdců
- Do grafu přidáme stok:
  - nový vrchol t a
  - hrany T vedoucí ze všech vrcholů G_0 bez následníků do t
- Nový graf $G = (V, E)$: $\quad V = V_0 \cup \{s, t\}, \quad E = E_0 \cup S \cup T$
- Budeme hledat řezy a minimální řezy z s do t v G

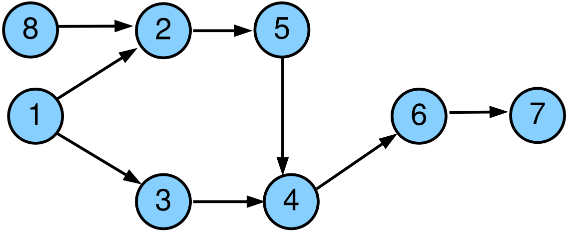
př. graf má 4 minimální řezy



Cvičení: minimální řez

Kolik minimálních řezů a které mají následující grafy?



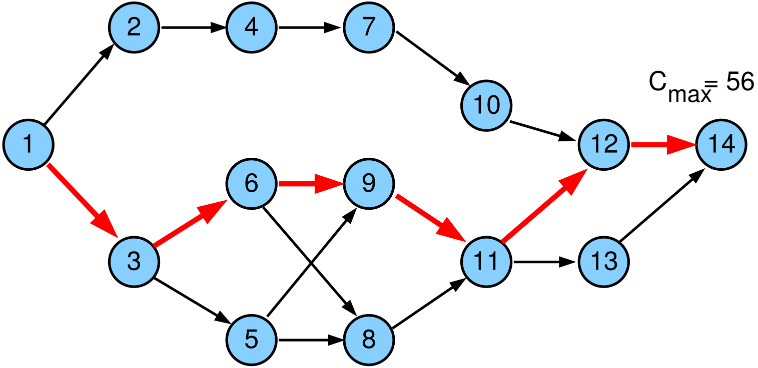


Kompromisní heuristika: příklad

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j^{max}	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
p_j^{min}	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
c_j^b	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
c_j	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

fixní režijní náklady na časovou jednotku $c_0 = 6$

Příklad (pokračování): maximální doba provádění



Kompromisní heuristika: příklad

$c_0 = 6$

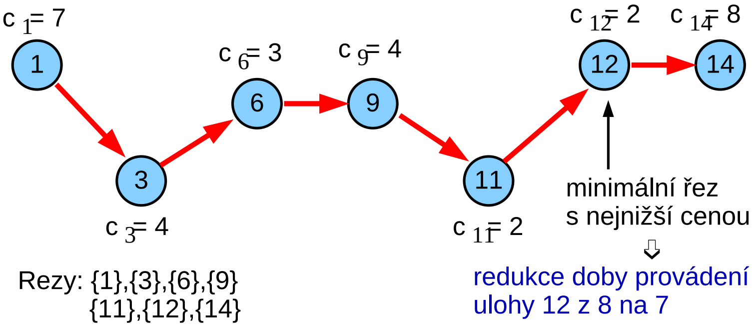
j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
$\mathbf{p_j^{max}}$	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
$\mathbf{p_j^{min}}$	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
$\mathbf{c_j^b}$	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
$\mathbf{c_j}$	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

Náklady na provedení projektu při maximální době trvání úloh

$$\begin{aligned}
F(p_j^{max}) &= C_{\max} c_0 + \sum_j \left(c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j^{max}) \right) = \\
&= C_{\max} c_0 + \sum_j c_j^b = \\
&= 56 \times 6 + 20 + 25 + 20 + 15 + 30 + 40 + 35 + 25 + \\
&\quad +30 + 20 + 25 + 35 + 20 + 10 = \\
&= 336 + 350 = 686
\end{aligned}$$

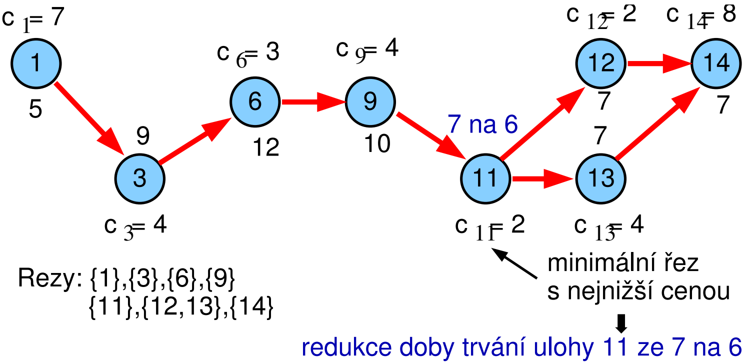
Graf kritických cest G_{CP}

- Kandidáti na redukci: uzel 11 a uzel 12, vybereme uzel 12



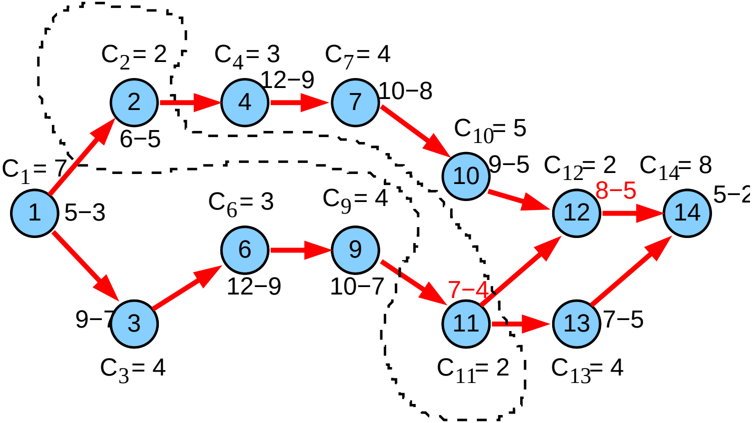
- Fixní režijní náklady se redukují z 56×6 na $55 \times 6 = 330$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{12} = 2$, tj. $350 + 2 = 352$
- Celková cena klesla z 686 na $330 + 352 = 682$

Graf kritických cest G_{CP}



- Fixní režijní náklady se redukují z 55×6 na $54 \times 6 = 324$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{11} = 2$, tj. $352 + 2 = 354$
- Celková cena klesla z 682 na $324 + 354 = 678$

Graf kritických cest G_{CP}



další redukce: pro uzel 2 na 5 a pro uzel 11 na 5, ...

- Fixní režijní náklady se redukují z 54×6 na $53 \times 6 = 318$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_2 + c_{11} = 2 + 2$, tj. $354 + 4 = 358$
- Celková cena klesla z 678 na $318 + 358 = 676$

Algoritmus kompromisní heuristiky

1. - Nastav doby provádění na jejich maximum: $p_j = p_j^{max}$
   - Urči všechny kritické cesty s těmito dobami provádění
   - Zkonstruuj graf G_{CP} kritických cest
2. - Urči všechny minimální řezy v G_{CP}
   - Najdi řezy, jejichž doba provádění je větší než jejich minimum: $p_j > p_j^{min} \quad \forall j \in G_{CP}$
   - Pokud takový řez neexistuje STOP, jinak běž na krok 3
3. - Pro každý minimální řez: spočítej cenu redukující všechny doby provádění o 1 časovou jednotku
   - Vyber minimální řez s nejnižší cenou
   - Jestliže je menší než fixní režijní náklady c_0 za časovou jednotku běž na krok 4, jinak STOP
4. - Redukuj všechny doby provádění v minimálním řezu o 1 časovou jednotku
   - Urči novou množinu kritických cest
   - Reviduj graf G_{CP} a běž na krok 2

Kompromisní heuristika: cvičení

- Jaká je cena za provádění projektu, pokud jsou doby trvání úloh maximální, tj. čemu se rovná $F(p_j^{max})$ za následujících předpokladů?
  - fixní režijní náklady na časovou jednotku jsou $c_0 = 4$
  - p_j^{max} maximální doba trvání úlohy j
  - p_j^{min} minimální doba trvání úlohy j
  - c_j marginální cena
  - c_j^b cena za provádění úlohy j při maximální době jejího trvání
  - $Prec_j$ předchůdci úlohy j

$\mathbf{j}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\mathbf{p_j^{max}}$	4	4	4	4	4	4	3	6
$\mathbf{p_j^{min}}$	3	2	2	2	2	2	2	6
$\mathbf{c_j^b}$	20	25	20	15	30	40	35	25
$\mathbf{c_j}$	3	5	5	1	2	5	3	5

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$Prec_j$	-	1	4,5	2	2	3,7	5	6

- Jak lze cenu za projekt zlepšit, pokud provedeme dva kroky kompromisní heuristiky? Kterým úlohám upravíte dobu trvání v jednotlivých krocích?

Obsah

1. Plánování projektu
   - Neomezené zdroje
   - Variabilní doba trvání
2. Barvení grafu
   - Popis problému a jednoduché řešení
   - Přiřazení místností
   - Rezervační problém
   - Rozvrhování operátorů

Barvení grafu

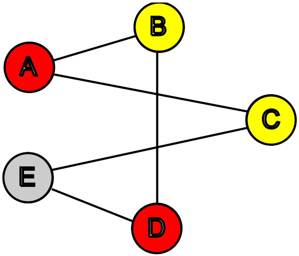
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím n barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev n nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přiřazení místností
- Rozvrhování operátorů

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- Stupeň uzlu
  - počet hran spojených s uzlem
- Úroveň saturace
  - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
  - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
  - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- Stupeň uzlu
  - počet hran spojených s uzlem
- Úroveň saturace
  - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
  - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
  - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- Algoritmus
  1. uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
  2. použij barvu 1 pro první uzel
  3. vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace
     v případě volby z nich vyber uzel
     s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
  4. obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
  5. jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP
     jinak běž na krok 3

Přiřazení místností

- Problém přiřazení místností

  cíl: přiřazení místnosti každému předmětu se zadanými časy
  - úloha = předmět s několika schůzkami týdně, jejichž časy jsou určeny
  - zdroj = místnost
  - dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
  - všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

  možné řešení:
  - nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
  - nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností
- Přiřazení místností jako barvení grafu
  - vrchol: předmět
  - hrana: mezi předměty, které vyžadují stejný čas výuky
  - barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti (zdroji)
    - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

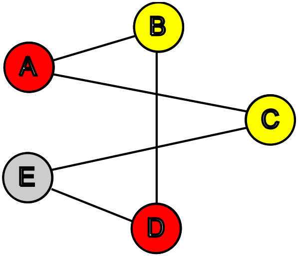
Přiřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2

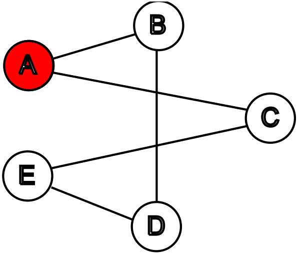
Řešení:

místnost	červená	žlutá	žlutá	červená	šedá



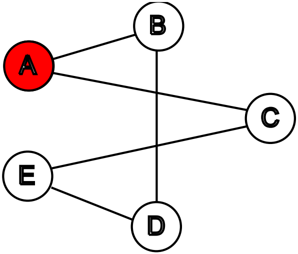
čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

Přiřazení místností: příklad (pokračování)

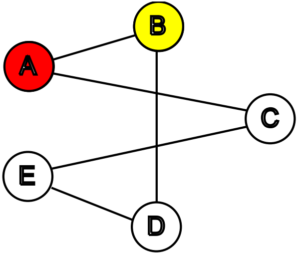


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2

Přiřazení místností: příklad (pokračování)

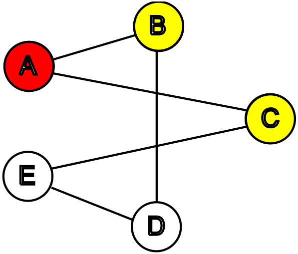


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2



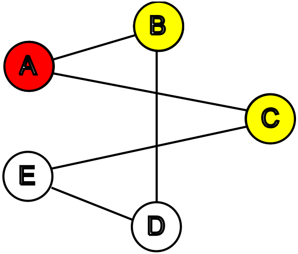
předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

Přiřazení místností: příklad (dokončení)

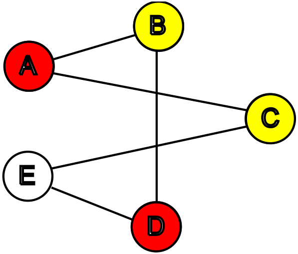


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1

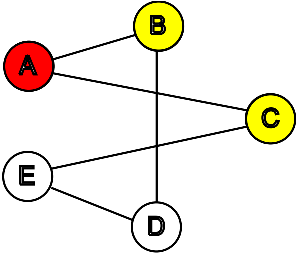
Přiřazení místností: příklad (dokončení)



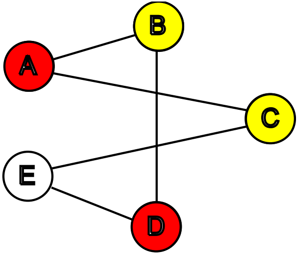
předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1

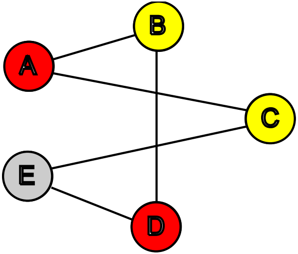


Přiřazení místností: příklad (dokončení)



předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1





Rezervační problém

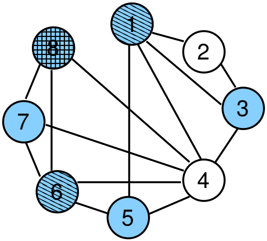
- Příklady
  - rezervace aut
  - rezervace pokojů v hotelu
  - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
  - $p_j = d_j - r_j$
  - p_j doba trvání úlohy
  - r_j termín dostupnosti
  - d_j termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů?
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací?

Rezervační problém jako barvení grafu

- Vrchol: rezervace
- Hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji
  - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací = chromatické číslo
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů = existuje barvení s daným počtem barev
- Příklad:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

Odpovídající problém barvení grafu:



Rozvrhování operátorů

- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
  - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
  - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- Rozvrhování operátorů jako barvení grafu
  - vrchol: úloha
  - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
  - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
    - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora
    - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu = existuje barvení s daným počtem barev
    - makespan = chromatické číslo grafu

D.Ú. plánování schůzek

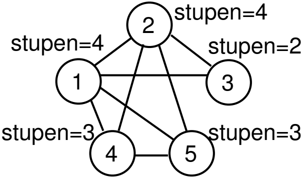
Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

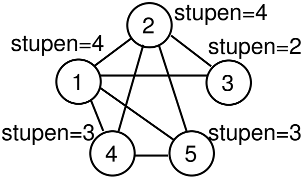
D.Ú. plánování schůzek (řešení)

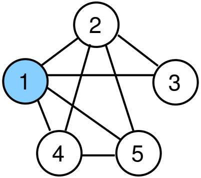
	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1



D.Ú. plánování schůzek (řešení)

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

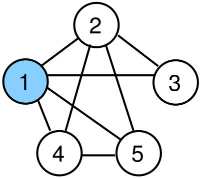




Můžeme vybrat buď úlohu 1 nebo úlohu 2

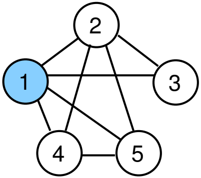
Např. vybereme 1 a obarvíme barvou 1

D.Ú. plánování schůzek (dokončení)

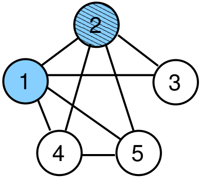


Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni

D.Ú. plánování schůzek (dokončení)

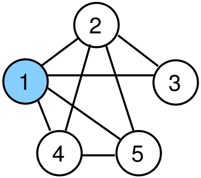


Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni

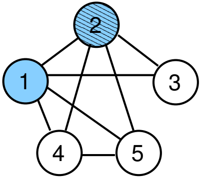


Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni

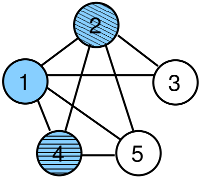
D.Ú. plánování schůzek (dokončení)



Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni

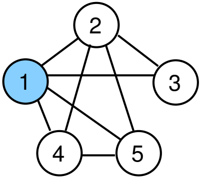


Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni

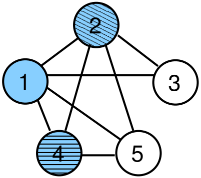


Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení

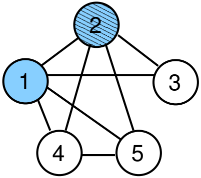
D.Ú. plánování schůzek (dokončení)



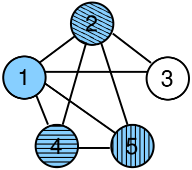
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



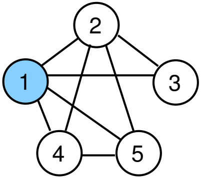
Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



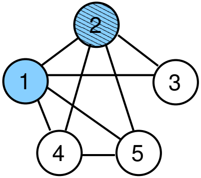
Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



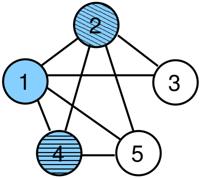
D.Ú. plánování schůzek (dokončení)



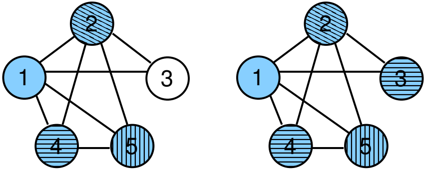
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3
stejnou barvou jako 4
⇒celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

Shrnutí

Přiřazení místností

- vrchol: předmět — úloha
- hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas — průnik časových bodů
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti — zdroj
  - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

Rezervační problém

- vrchol: rezervace — úloha
- hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase — průnik intervalů
- barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji — zdroj
  - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase

Rozvrhování operátorů

- vrchol: úloha — úloha
- hrana: mezi úlohami vyžadujícími stejného operátora — průnik zdrojů
- barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy — časový bod
  - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora

Cvičení

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

1. Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,3,5)	(2,4)	(1,2)	(3,4)	(1,5)

   Nápověda: problém přiřazení místností

2. Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

operace	A	B	C	D	E	F
interval	1-3	2-4	1-4	4-5	5-8	5-6

   Nápověda: rezervační problém

Cvičení (pokračování)

3. Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů