

Formální jazyk

abeceda - slovo - jazyk

Abeceda je libovolná konečná množina.

Prvky abecedy nazýváme **znaky / písmena / symboly**.

Slovo (řetězec) nad abecedou Σ je libovolná konečná posloupnost znaků této abecedy.

Prázdné posloupnosti znaků odpovídá **prázdné slovo**, označované ε .

Počet členů posloupnosti v značíme $|v|$ a nazýváme **délkou slova**.

Počet výskytů znaku a ve slově v značíme $\#_a(v)$.

Jazyk nad abecedou Σ je libovolná množina slov nad Σ .

Množinu všech slov nad abecedou Σ značíme Σ^* , množinu všech neprázdných slov Σ^+ .

Jazyky nad Σ jsou tedy právě podmnožiny Σ^* .

Operace a relace nad slovy

Binární operace **zřetězení**, označována \cdot , která je definována předpisem:

$$u \cdot v = uv$$

Operace zřetězení je asociativní, tj. $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$ pro libovolná slova u, v, w .

ε se chová jako jednotkový prvek, tj. $u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u = u$ pro libovolné slovo u .

Slovo u je **pod slovem** slova v , jestliže existují slova x, y taková, že $v = x.u.y$.

Pokud navíc $x = \varepsilon$, říkáme že slovo u je **předponou (prefixem)** slova v , což značíme $u \preceq v$. Je-li $y = \varepsilon$, nazveme u **příponou (sufixem)** slova v .

Unární operace ***i-té mocniny*** slova, která je definovaná induktivně pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ takto: necht' Σ je libovolná abeceda, u libovolné slovo nad abecedou Σ . Pak

- $u^0 = \varepsilon$

- $u^{i+1} = u.u^i$

Operace nad jazyky

Nechť L je jazyk nad abecedou Σ , K je jazyk nad abecedou Δ .
Výsledkem je vždy jazyk nad abecedou $\Sigma \cup \Delta$.

- Standardní množinové operace **sjednocení** (\cup), **průnik** (\cap) a **rozdíl** (\setminus).
- **Zřetězením** jazyků L a K je jazyk $L.K = \{u.v \mid u \in L, v \in K\}$.

Platí $\emptyset.L = L.\emptyset = \emptyset$ a $\{\varepsilon\}.L = L.\{\varepsilon\} = L$.

- **i -tá mocnina** jazyka L definována induktivně pro $i \in \mathbb{N}_0$:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{i+1} = L.L^i$$

$$\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$$

$$\emptyset^i = \emptyset \text{ pro libovolné } i \in \mathbb{N}$$

$$\{\varepsilon\}^j = \{\varepsilon\} \text{ pro libovolné } j \in \mathbb{N}_0$$

- **Iterace** jazyka L je jazyk $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$.

$$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$$

- **Pozitivní iterace** jazyka L je jazyk $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$.

$$\emptyset^+ = \emptyset.$$

■ **Doplněk** jazyka L je jazyk $co-L = \Sigma^* \setminus L$.

■ **Zrcadlovým obrazem** slova $w = a_1 \dots a_n$ nazýváme slovo $w^R = a_n \dots a_1$ ($\varepsilon^R = \varepsilon$).

Zrcadlový obraz jazyka L definujeme $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

Nechť \mathcal{L} je třída jazyků a o je n -ární operace na jazycích. Řekneme, že \mathcal{L} je **uzavřená na** o , pokud pro libovolné jazyky L_1, \dots, L_n patřící do \mathcal{L} platí, že také jazyk $o(L_1, \dots, L_n)$ patří do \mathcal{L} .

Aplikace

Konečná reprezentace jazyka

- potřeba konečné reprezentace
- co je konečná reprezentace
- automaty a gramatiky
- existuje konečná reprezentace pro každý jazyk?
- jaké vlastnosti mají jazyky, které jsou konečně reprezentovatelné?

Gramatika

Gramatika je popis jazyka pomocí pravidel, podle kterých se vytvářejí všechna slova daného jazyka.

<věta> → <podmětná část><přísudková část>

<podmětná část> → <podstatné jméno>

<podstatné jméno> → JANA

<přísudková část> → <sloveso><předmětová část>

<sloveso> → ČTE

<předmětová část> → <podstatné jméno>

<podstatné jméno> → KNIHU

Zadání syntaxe vyšších programovacích jazyků — Backus-Naurova normální forma (BNF)

Definice. Gramatika \mathcal{G} je čtveřice (N, Σ, P, S) , kde

- N je neprázdná konečná množina **neterminálních symbolů** (stručněji **neterminálů**),
- Σ je konečná množina **terminálních symbolů (terminálů)** taková, že $N \cap \Sigma = \emptyset$. Množinu **všech symbolů** gramatiky definujeme jako $V = N \cup \Sigma$,
- $P \subseteq V^*NV^* \times V^*$ je konečná množina **pravidel**. Pravidlo (α, β) obvykle zapisujeme ve tvaru $\alpha \rightarrow \beta$ (a čteme jako „ α přepiš na β “),
- $S \in N$ je speciální **počáteční neterminál** (nazývaný také **kořen gramatiky**).

Příklad

Gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ určuje

- relaci $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$ **přímého odvození** na množině V^*

$\gamma \Rightarrow_{\mathcal{G}} \delta$ právě když existuje pravidlo $\alpha \rightarrow \beta \in P$ a slova $\eta, \rho \in V^*$ taková, že $\gamma = \eta\alpha\rho$ a $\delta = \eta\beta\rho$.

Používá se i označení **krok odvození**.

■ relaci $\overset{k}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$ **odvození v k krocích** pro $k \in \mathbb{N}_0$

$\overset{0}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$ je identická relace

$$\overset{k+1}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} = \overset{k}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} \circ \Rightarrow_{\mathcal{G}}$$

- relaci $\overset{\leq k}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$ **odvození v nejvýše k krocích** pro $k \in \mathbb{N}_0$

$$\overset{\leq k}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=0}^k \overset{i}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$$

- relaci $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$ **odvození** a relaci $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^+$ **netriviálního odvození**

$$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \overset{i}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} \quad \Rightarrow_{\mathcal{G}}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{i}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$$

Relace $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$ je reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$.

Relace $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^+$ je tranzitivní uzávěr relace $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$.

Větná forma gramatiky \mathcal{G} je každý řetěz z množiny V^* , který lze odvodit z počátečního neterminálu gramatiky.

Věta gramatiky \mathcal{G} je každá větná forma, která obsahuje pouze terminály.

Jazyk generovaný gramatikou \mathcal{G} je množina $L(\mathcal{G})$ všech vět gramatiky

$$L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}.$$

Gramatiky \mathcal{G}_1 a \mathcal{G}_2 nazveme **jazykově ekvivalentní**, právě když generují tentýž jazyk, tj. $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$.

Konvence

Příklad

$$\mathcal{G} = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abS \\ S \rightarrow bX \\ bbX \rightarrow babS \\ bbX \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

Příklad

$$\mathcal{G} = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abS \\ S \rightarrow bX \\ bbX \rightarrow babS \\ bbX \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

Chomského hierarchie gramatik

Klasifikace gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel:

- typ 0** pravidla v obecném tvaru (**frázové gramatiky**)
- typ 1** pro každé pravidlo $\alpha \rightarrow \beta$ platí $|\alpha| \leq |\beta|$ s eventuální výjimkou pravidla $S \rightarrow \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla (**kontextové gramatiky**)
- typ 2** každé pravidlo je tvaru $A \rightarrow \alpha$, kde $|\alpha| \geq 1$, s eventuální výjimkou pravidla $S \rightarrow \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla (**bezkontextové gramatiky (bez ε -pravidel)**)
- typ 3** každé pravidlo je tvaru $A \rightarrow aB$ nebo $A \rightarrow a$ s eventuální výjimkou pravidla $S \rightarrow \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla (**regulární gramatiky**)

Chomského hierarchie jazyků

Hierarchie gramatik určuje hierarchii jazyků.

Jazyk L je typu 0 (rekursivně spočetný), pokud existuje gramatika \mathcal{G} typu 0 taková, že $L(\mathcal{G}) = L$.

Analogicky: **kontextový, bezkontextový, regulární**

\mathcal{L}_0 třída všech rekursivně spočetných jazyků

\mathcal{L}_1 třída všech kontextových jazyků

\mathcal{L}_2 třída všech bezkontextových jazyků

\mathcal{L}_3 třída všech regulárních jazyků

$$\mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_3$$

(Dokážeme později.)

Věta. Nad abecedou $\{a\}$ existuje jazyk, který není typu 0.

Důkaz.

Množina všech slov nad abecedou $\{a\}$ je spočetně nekonečná.

Množina všech jazyků nad touto abecedou má proto mohutnost 2^{\aleph_0} (je tedy nespočetná).

Gramatik typu 0 nad abecedou $\{a\}$ je pouze spočetně mnoho:

- buď M libovolná, ale pevně zvolená spočetná množina
- b.ú.n.o. každá gramatika má neterminály z M
- každá gramatika je slovo nad abecedou

$$M \cup \{a, \rightarrow, \varepsilon, \underline{,}, \underline{)}, \underline{\{,}, \underline{\}}, \underline{,}\}$$

- všech slov délky i nad touto abecedou je $\aleph_0^i = \aleph_0$ pro lib. $i \in \mathbb{N}$
- **všech** slov nad touto abecedou je tedy spočetně mnoho
(*sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné*)

