list *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky, jeho formule φ, realizace $\mathcal{M}$ a teorie T. O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej: $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \vdash \varphi$, $\mathcal{M} \vdash T$, $T \models \varphi$, $T \vdash \varphi$.
(Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

Příklad 2
10 bodů

Do slova $A \to A \to \neg A \to A$ doplňte závorky tak, aby vznikla formule výrokové logiky s co nejkratší vytvořující posloupností. Uveďte dotyčnou vytvořující posloupnost.

Příklad 3
10 bodů

Nechť $\curlywedge$ značí operátor NOR, tj. $\psi \curlywedge \xi \;\approx\; \neg(\psi \vee \xi)$. Dejte příklad formule φ systému $\mathcal{L}(\curlywedge)$ výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli $A \to B$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot, P\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol a P je unární predikátový symbol.
Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když splňuje obě následující podmínky:
- nosičem je množina $\{a, b\}^*$ všech (konečných) slov nad abecedou $\{a, b\}$;
- $\cdot$ se realizuje jako zřetězení.

Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } P \text{ se realizuje jako „je palindrom“, tj. } P_{\mathcal{M}} = \{u \in \{a, b\}^* \colon u = u^R\}.$$

Příklad 5
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, Q, R, f, c\}$ bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P, Q, R	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme následující teorii nad jazykem $\mathcal{L}$:

$$T = \{P(c),\ P(x) \to Q(f(x)),\ Q(x) \to R(f(x)),\ R(x) \to P(f(x)),\ P(x) \to (P(f(x)) \vee R(f(x)))\}$$

Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$, jejíž modely jsou právě ty realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde:

a) právě tři individua mají nekonečně mnoho vzorů v $f_{\mathcal{M}}$;

b) nekonečně mnoho individuí má právě tři vzory v $f_{\mathcal{M}}$.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol a f je unární funkční symbol.
Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $M = \{0, 1, \ldots, 11\}$, $P_{\mathcal{M}} = \{0, 4, 6, 8, 9\}$ a $f_{\mathcal{M}}$ je permutace $(0\,1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)(8\,9\,10\,11)$, tj. $f_{\mathcal{M}}(n) = 4\lfloor n/4 \rfloor + ((n+1) \bmod 4)$ pro lib. $n \in M$.

Definice. Řekneme, že formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *rozpoznávající* formule pro individuum $n \in M$, právě když pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e] \Leftrightarrow e(x) = n$.

Rozhodněte a dokažte, pro která individua $n \in M$ existuje jejich rozpoznávající formule.