0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Uvažujme Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky.
Uveďte odvozovací pravidlo modus ponens.
Definujte, co je důkaz formule (nemusíte uvádět, jak vypadají schémata axiomů).
Definujte, kdy je odvozovací systém korektní.
Definujte, kdy je odvozovací systém úplný.
Je Lukasiewiczův odvozovací systém korektní? Je úplný?

Příklad 2
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol a f je unární funkční symbol. Napište nějakou vytvořující posloupnost pro formuli $(\forall x\, \neg P(f(f(x))) \rightarrow f(y) = x)$ i pro všechny termy, které se v ní vyskytují.

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formulí φ, ψ systému $\mathcal{L}(\rightarrow)$ výrokové logiky tak, aby formule $A \rightarrow \varphi$ a $B \rightarrow \psi$ byly ekvivalentní, ale nebyly tautologie.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
40 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{Q\}$ bez rovnosti, kde Q je ternární predikátový symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ všech přirozených čísel a $Q_{\mathcal{M}} = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3\colon\ b$ je aritmetický průměr čísel $a, c\}$.

Zadejte formuli $\varphi(x, y)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když:}$$

a) $e(x) = e(y)$;
b) $e(x) = 0$;
c) $e(x)$ je liché číslo;
d) $e(x)$ je násobek tří;
e) $e(x) = 42$.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
54 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol a f je unární funkční symbol.

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ dejte příklad formule φ_n jazyka $\mathcal{L}$ takové, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models \varphi_n$, právě když nosič realizace $\mathcal{M}$ je právě n-prvkový.

b) Uvažme teorii $T = \{\varphi_6,\ P(f(x)),\ \bigwedge_{i=1}^{2} f^i(x) \neq x,\ P(y) \to \bigvee_{i=1}^{3} f^i(x) = y\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$. Dokažte, že teorie T není úplná.

c) Dejte příklad konečné teorie S jazyka $\{P\}$ s rovností tak, aby teorie T byla jejím konzervativním rozšířením. Dokažte správnost své odpovědi.

d) Existuje uzavřená formule ψ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že obě teorie $T_1 = T \cup \{\psi\}$, $T_2 = T \cup \{\neg\psi\}$ jsou neúplné a jsou nekonzervativními rozšířeními teorie T? Svou odpověď zdůvodněte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
26 bodů

Definice. Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka $\mathcal{L}$. Individuum $a \in M$ nazveme *popsatelné*, právě když je hodnotou nějakého uzavřeného termu, tj. existuje uzavřený term t jazyka $\mathcal{L}$ takový, že $t^{\mathcal{M}} = a$. Realizaci $\mathcal{M}$ nazveme *pěknou*, právě když každé její individuum je popsatelné.

Dejte příklad konečného jazyka $\mathcal{L}$ s rovností, pro nějž
a) existuje;
b) neexistuje
teorie T, jejíž modely jsou právě pěkné realizace jazyka $\mathcal{L}$. Dokažte správnost své odpovědi. Ve svém řešení se neodvolávejte na Löwenheimovu-Skolemovu větu (nebo ji dokažte).