2. vnitrosemestrální písemka – MB203 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — A

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \;\; z \leq 6, \;\; z \geq \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

a) Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.

b) Určete objem oblasti M.

2. (4.5 bodu)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + 3y' - 4y = 8(x - 1)^2$.

c) Určete řešení rovnice $y''+3y'-4y = 8(x-1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{13}{4}$ a $y'(0) = 0$.

3. (2 body) Máme tři urny s míčky:

- v urně I. je jeden černý, dva bílé a tři červené míčky,
- v urně II. je jeden černý, jeden bílý a dva červené míčky,
- v urně III. je dva černé, dva bílé a dva červené míčky.

Náhodně vybereme jednu z těchto uren a z ní tři míčky (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána druhá urna, jestliže tři vybrané míčky byly různých barev.

2. vnitrosemestrální písemka – MB203 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — B

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16,\ \ z \geq -1,\ \ z \leq x^2 + y^2\big\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

a) Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.

b) Určete objem oblasti M.

2. (4.5 bodu)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 10y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 14x + 24$.

c) Určete řešení rovnice $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 14x + 24$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{11}{5}$ a $y'(0) = 0$.

3. (2 body) Studenti tří oborů (matematiky, fyziky a informatiky) jsou rozmístěni v učebnách A, B a C následovně:

- v učebně A jsou tři studenti matematiky, jeden student fyziky a jeden student informatiky,
- v učebně B jsou dva studenti matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky,
- v učebně C je jeden student matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky.

Náhodně vybereme jednu z těchto učeben a z ní tři studenty (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána učebna B, jestliže tři vybraní studenti byli z různých oborů.

2. vnitrosemestrální písemka – MB203 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — C

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \ \ z \leq 3, \ \ z \geq -2(x^2 + y^2) \big\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

a) Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.

b) Určete objem oblasti M.

2. (4.5 bodu)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y' - 5y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + 4y' - 5y = 25(x - 1)^2$.

c) Určete řešení rovnice $y'' + 4y' - 5y = 25(x - 1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{22}{5}$ a $y'(0) = 3$.

3. (2 body) Máme tři urny s míčky:

- v urně I. je jeden černý, jeden bílý a dva červené míčky,
- v urně II. je dva černé, dva bílé a dva červené míčky,
- v urně III. je jeden černý, dva bílé a tři červené míčky.

Náhodně vybereme jednu z těchto uren a z ní tři míčky (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána třetí urna, jestliže tři vybrané míčky byly různých barev.

2. vnitrosemestrální písemka – MB203 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — D

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ \ z \geq -2,\ \ z \leq -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

a) Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.

b) Určete objem oblasti M.

2. (4.5 bodu)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' - 8y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + 2y' - 8y = 16(x + 1)^2$.

c) Určete řešení rovnice $y'' + 2y' - 8y = 16(x + 1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{11}{4}$ a $y'(0) = -3$.

3. (2 body) Studenti tří oborů (matematiky, fyziky a informatiky) jsou rozmístěni v učebnách A, B a C následovně:

- v učebně A jsou dva studenti matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky,
- v učebně B je jeden student matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky,
- v učebně C jsou tři studenti matematiky, jeden student fyziky a jeden student informatiky.

Náhodně vybereme jednu z těchto učeben a z ní tři studenty (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána učebna B, jestliže tři vybraní studenti byli z různých oborů.

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina A:

1. a) **[1b]** Množina M je část válce s osou z o poloměrem 2, která je zespoda ohraničená paraboloidem $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a seshora ohraničená rovinou $z = 6$. Osa rotace je osa z, [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -2$ a $x = 2$ zespoda ohraničená parabolou $z = \frac{1}{2}x^2$ a seshora ohraničená přímkou $z = 6$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, přičemž z-tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 6,$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r, [0.5b], takže hledaný objem V je

$$V = \iiint_M dxdydz = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=\frac{1}{2}r^2}^{6} r\,dzdrd\varphi = \Big(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\Big)\Big(\int_{r=0}^{2} r(6 - \tfrac{1}{2}r^2)dr\Big) =$$
$$= 2\pi\big[-\tfrac{1}{8}r^4 + 3r^2\big]_0^2 = 2\pi \cdot 10 = 20\pi,$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) **[1b]** Diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1)$, [0.5b], který má kořeny -4 a 1. Tedy řešení jsou tvaru $C_1e^{-4x} + C_2e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Rovnice je $y'' + 3y' - 4y = 8(x-1)^2$ má pravou stranu $4(x+1)^2 = 8x^2 - 16x + 8$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $8(x^2 - 2x + 1) \cdot e^{0x}$, kde 0 *není* kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 3(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = -4ax^2 + (6a - 4b)x + (2a + 3b - 4c) = 8x^2 - 16x + 8,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-4a = 8$, $6a - 4b = -16$, $2a + 3b - 4c = 8$, [0.5b], která má řešení $a = -2$, $b = 1$, $c = -\frac{9}{4}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -2x^2 + x - \frac{9}{4}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x - 2x^2 + x - \tfrac{9}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \tfrac{9}{4} = -\tfrac{13}{4} \quad \text{a} \quad y'(0) = -4C_1 + C_2 + 1 = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = -1$, tedy hledané řešení je $y(x) = -e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem A, že budou vytaženy míčky různých barev, a také budeme potřebovat jevy U_i, že k výběru byla zvolena urna číslo $i \in \{1, 2, 3\}$. Chceme určit $P(U_2|A)$. Platí $P(U_i) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_2|A) = \frac{P(A|U_2)P(U_2)}{P(A)}$, [0.5b]. Platí

$$P(A) = P(A|U_1)P(U_1) + P(A|U_2)P(U_2) + P(A|U_3)P(U_3) = \frac{6}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{6}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5},$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_2|A) = \frac{P(A|U_2)P(U_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12},$$

[0.5b].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina B:

1. a) **[1b]** Množina M je část válce s osou z o poloměrem 4, která je zespoda ohraničená rovinou $z = -1$ a seshora ohraničená paraboloidem $z = x^2 + y^2$. Osa rotace je osa z, [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -4$ a $x = 4$ zespoda ohraničená přímkou $z = -1$ a seshora ohraničená parabolou $z = x^2$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, přičemž z-tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 4 \quad \text{a} \quad -1 \le z \le x^2 + y^2,$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r, [0.5b], takže hledaný objem V je

$$V = \iiint_M dxdydz = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=-1}^{r^2} rdzdrd\varphi = \Big(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\Big)\Big(\int_{r=0}^{4} r(r^2+1)dr\Big) =$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{1}{2}r^2\right]_0^4 = 2\pi \cdot 72 = 144\pi,$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) **[1b]** Diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 10y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda+5)(\lambda-2)$, [0.5b], který má kořeny -5 a 2. Tedy řešení jsou tvaru $C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Rovnice je $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 14x + 24$ má pravou stranu $10x^2 + 14x + 24$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $(10x^2 + 14x + 24) \cdot e^{0x}$, kde 0 *není* kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 3(2ax + b) - 10(ax^2 + bx + c) = -10ax^2 + (6a - 10b)x + (2a + 3b - 10c) = 10x^2 + 14x + 24,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-10a = 10$, $6a - 10b = 14$, $2a + 3b - 10c = 24$, [0.5b], která má řešení $a = -1$, $b = -2$, $c = -\frac{16}{5}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -x^2 - 2x - \frac{16}{5}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} - x^2 - 2x - \tfrac{16}{5}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} - x^2 - 2x - \frac{16}{5}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \tfrac{16}{5} = -\tfrac{11}{5} \quad \text{a} \quad y'(0) = -5C_1 + 2C_2 - 2 = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = e^{2x} - x^2 - 2x - \frac{16}{5}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem D, že budou vybráni studenti různých oborů, a také budeme potřebovat jevy U_A, U_B a U_C, že k výběru byl zvolena učebna A, B nebo C. Chceme určit $P(U_B|D)$. Platí $P(U_A) = P(U_B) = P(U_C) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)}$, [0.5b]. Platí

$$P(D) = P(D|U_A)P(U_A) + P(D|U_B)P(U_B) + P(D|U_C)P(U_C) = \frac{3}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{30},$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)} = \frac{\frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{11}{30}} = \frac{4}{11},$$

[0.5b].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina C:

1. a) **[1b]** Množina M je část válce s osou z o poloměrem 2, která je zespoda ohraničená paraboloidem $z = -2(x^2 + y^2)$ a seshora ohraničená rovinou $z = 3$. Osa rotace je osa z, [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -2$ a $x = 2$ zespoda ohraničená parabolou $z = -2x^2$ a seshora ohraničená přímkou $z = -1$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, přičemž z-tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2 \quad \text{a} \quad -2(x^2 + y^2) \le z \le 3,$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r, [0.5b], takže hledaný objem V je

$$V = \iiint_M dxdydz = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=-2r^2}^{3} r\,dzdrd\varphi = \Big(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\Big)\Big(\int_{r=0}^{2} r(3+2r^2)dr\Big) =$$
$$= 2\pi\big[\tfrac{1}{2}r^4 + \tfrac{3}{2}r^2\big]_0^2 = 2\pi\cdot 14 = 28\pi,$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) **[1b]** Diferenciální rovnice $y'' + 4y' - 5y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda+5)(\lambda-1)$, [0.5b], který má kořeny -5 a 1. Tedy řešení jsou tvaru $C_1e^{-5x} + C_2e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Rovnice je $y'' + 4y' - 5y = 25(x-1)^2$ má pravou stranu $25(x-1)^2 = 25x^2 - 50x + 25$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $25(x-1)^2 \cdot e^{0x}$, kde 0 *není* kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 4(2ax + b) - 5(ax^2 + bx + c) = -5ax^2 + (8a - 5b)x + (2a + 4b - 5c) = 25x^2 - 50x + 25,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-5a = 25$, $8a - 5b = -50$, $2a + 4b - 5c = 25$, [0.5b], která má řešení $a = -5$, $b = 2$, $c = -\frac{27}{5}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -5x^2 + 2x - \frac{27}{5}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^x - 5x^2 + 2x - \tfrac{27}{5}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^x - 5x^2 + 2x - \frac{27}{5}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \tfrac{27}{5} = -\tfrac{22}{5} \quad \text{a} \quad y'(0) = -5C_1 + C_2 + 2 = 3,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = e^x - 5x^2 + 2x - \frac{27}{5}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem A, že budou vytaženy míčky různých barev, a také budeme potřebovat jevy U_i, že k výběru byla zvolena urna číslo $i \in \{1, 2, 3\}$. Chceme určit $P(U_3|A)$. Platí $P(U_i) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_3|A) = \frac{P(A|U_3)P(U_3)}{P(A)}$, [0.5b]. Platí

$$P(A) = P(A|U_1)P(U_1) + P(A|U_2)P(U_2) + P(A|U_3)P(U_3) = \frac{2}{\binom{4}{3}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{8}{\binom{6}{3}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6}{\binom{6}{3}}\cdot\frac{1}{3} =$$
$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{8}{20}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5},$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_3|A) = \frac{P(A|U_3)P(U_3)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{\binom{6}{3}}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4},$$

[0.5b].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina D:

1. a) **[1b]** Množina M je část válce s osou z o poloměrem 1, která je zespoda ohraničená rovinou $z = -2$ a seshora ohraničená paraboloidem $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Osa rotace je osa z, [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -1$ a $x = 1$ zespoda ohraničená přímkou $z = -2$ a seshora ohraničená parabolou $z = -\frac{1}{2}x^2$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, přičemž z-tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1 \quad \text{a} \quad -2 \le z \le -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r, [0.5b], takže hledaný objem V je

$$V = \iiint_M dxdydz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=-2}^{-\frac{1}{2}r^2} r dzdrd\varphi = \Big(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\Big)\Big(\int_{r=0}^{1} r(-\tfrac{1}{2}r^2 + 2)dr\Big) =$$
$$= 2\pi\big[-\tfrac{1}{8}r^4 + r^2\big]_0^1 = 2\pi \cdot \tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{4}\pi,$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) **[1b]** Diferenciální rovnice $y'' + 2y' - 8y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda + 4)(\lambda - 2)$, [0.5b], který má kořeny -4 a 2. Tedy řešení jsou tvaru $C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].

b) **[2.5b]** Rovnice je $y'' + 2y' - 8y = 16(x + 1)^2$ má pravou stranu $16(x + 1)^2 = 16x^2 + 32x + 16$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $16(x + 1)^2 \cdot e^{0x}$, kde 0 *není* kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 2(2ax + b) - 8(ax^2 + bx + c) = -8ax^2 + (4a - 8b)x + (2a + 2b - 8c) = 16x^2 + 32x + 16,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-8a = 16$, $4a - 8b = 32$, $2a + 2b - 8c = 16$, [0.5b], která má řešení $a = -2$, $b = -5$, $c = -\frac{15}{4}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -2x^2 - 5x - \frac{15}{4}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - 2x^2 - 5x - \tfrac{15}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - 2x^2 - 5x - \frac{15}{4}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \tfrac{15}{4} = -\tfrac{11}{4} \quad \text{a} \quad y'(0) = -4C_1 + 2C_2 - 5 = -3,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = e^{2x} - 2x^2 - 5x - \frac{15}{4}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem D, že budou vybráni studenti různých oborů, a také budeme potřebovat jevy U_A, U_B a U_C, že k výběru byl zvolena učebna A, B nebo C. Chceme určit $P(U_B|D)$. Platí $P(U_A) = P(U_B) = P(U_C) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)}$, [0.5b]. Platí

$$P(D) = P(D|U_A)P(U_A) + P(D|U_B)P(U_B) + P(D|U_C)P(U_C) = \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{30},$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)} = \frac{\frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{11}{30}} = \frac{4}{11},$$

[0.5b].