Algebra I – podzim 2018 – 1. termín

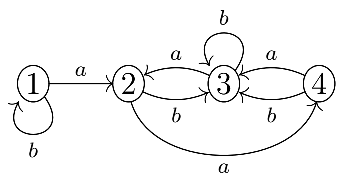
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda množina

$$\{\, 2a + \sqrt{2}b + 2\sqrt[4]{2}c\mathrm{i} + \sqrt[4]{8}d\mathrm{i} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \,\}$$

je podokruhem, případně ideálem, okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}\mathrm{i}]$.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa

$$\big((\mathbb{R}[x], +) \times (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{Z}[x], +) \times (\{\, a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}, +)\big)/H,$$

kde

$$H = \big\{\, (f, f(1), g, 2g(2) + 3z\mathrm{i}) \mid f \in \mathbb{R}[x],\ g \in \mathbb{Z}[x],\ z \in \mathbb{Z},\ (x^2 + 1) \text{ dělí } f \,\big\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1},$$

kde α je kořenem polynomu $x^4 + 3x^2 + 3x + 6$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. (10 bodů) Dejte příklad nekonečné grupy a její čtyřprvkové podgrupy, která není cyklická.

7. (10 bodů) Dejte příklad konečného okruhu takového, že právě dvě pětiny jeho prvků jsou jednotky.

8. (5 bodů) Definujte okruh polynomů nad okruhem $(R, +, \cdot)$.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti podílového tělesa.

10. (10 bodů) Dokažte, že každá podgrupa nekonečné cyklické grupy je cyklická.