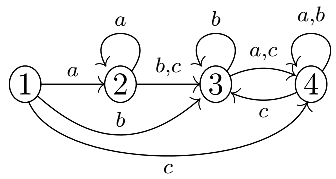
Algebra I – podzim 2018 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Nechť R značí množinu všech uspořádaných trojic kladných reálných čísel. Rozhodněte, zda $(R, \oplus, *)$, kde $\oplus$ a $*$ jsou operace definované předpisy
$$(p, q, r) \oplus (s, t, u) = (p \cdot s, q \cdot t, r \cdot u),$$
$$(p, q, r) * (s, t, u) = (p^{\log s}, t^{\log q}, r^{\log s} \cdot u^{\log q}),$$
pro všechna $p, q, r, s, t, u \in \mathbb{R}^+$, je okruh a zda je to těleso.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Nechť
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ c & p \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}.$$
Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((G, \cdot) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)\big)/H$, kde
$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \frac{n}{m} & 0 \\ r & \frac{n}{m} \end{pmatrix}, \frac{m}{n} \right) \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \text{ lichá},\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt{3 + \sqrt{3}} \cdot \mathrm{i} + \sqrt{3} + 1$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^5 - 9\alpha^3 - 4\alpha^2 + 9\alpha + 6},$$
kde α je kořenem polynomu $x^4 - 8x^2 - 4x + 2$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy, která má právě tři podgrupy.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad tří těles R, S a T takových, že $R \subseteq S \subseteq T$ a platí $[S : R] = [T : S] = 2$.

8. **(5 bodů)** Definujte okruh a obor integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující rozšíření tělesa o algebraický prvek a rozšíření tělesa o transcendentní prvek.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že inverze k izomorfismu pologrup je izomorfismus.