Prohledávání a pohled dopředu

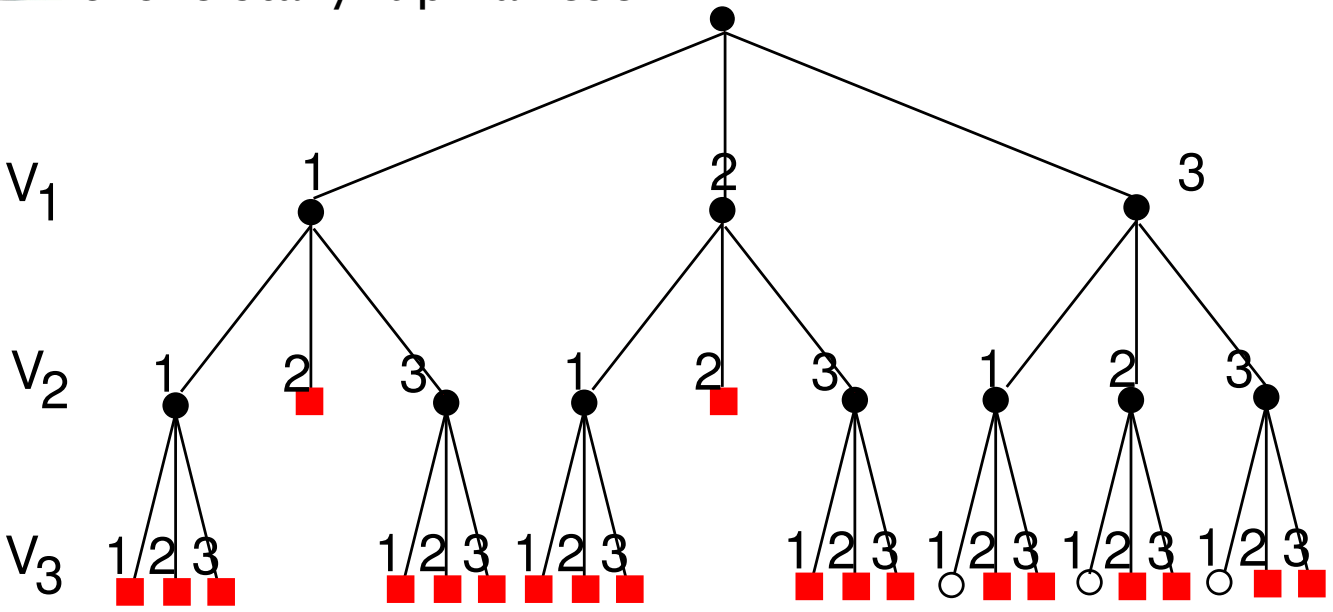
Přehled prohledávacích algoritmů pro CSP

- **Rozšiřování částečného konzistentního přiřazení**
  - stromové prohledávání
    - backtracking
    - pohled dopředu (propagace omezení)
    - pohled zpět (inteligentní vracení)
    - neúplná stromová prohledávání
- **Procházení úplných nekonzistentních přiřazení**
  - generuj a testuj
  - lokální prohledávání
- **Kombinování úplných nekonzistentních přiřazení**
  - *population-based search*

Prohledávací algoritmy pro CSP

Prohledávací algoritmy prochází (traversálně) **graf stavového prostoru**

- uzly grafu (stavy): konzistentní částečné instanciace
- iniciální stav: prázdné přiřazení
- hrany grafu: operátory, které rozšíří částečné řešení $[x_1/a_1, \ldots, x_j/a_j]$ o přiřazení jedné proměnné, které není v konfliktu s dřívějšími přiřazeními, tj. vznikne $[x_1/a_1, \ldots, x_j/a_j, x_{j+1}/a_{j+1}]$
- cílové stavy: úplná řešení



- červené čtverečky: chybný pokus o instanciaci, řešení neexistuje
- nevyplněná kolečka: nalezeno řešení (cílové stavy)
- černá kolečka: vnitřní uzel, máme pouze částečné přiřazení

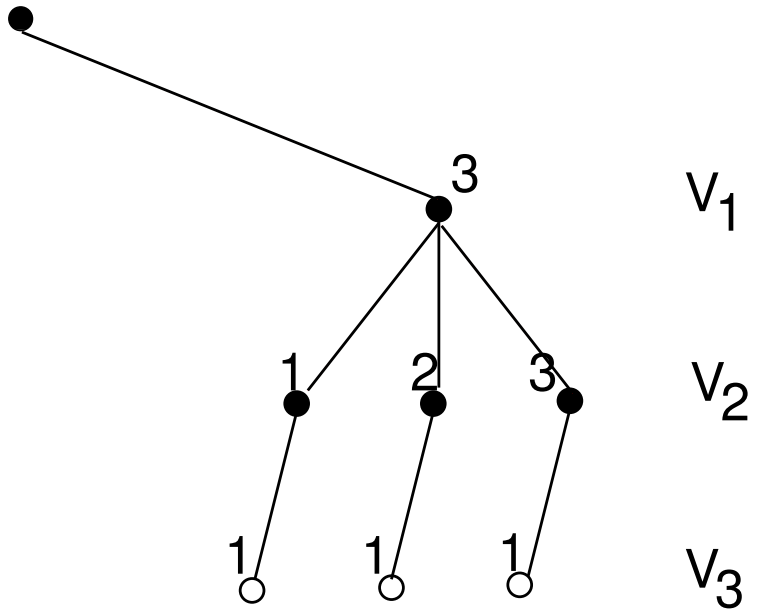
Prohledávací algoritmy pro CSP: vlastnosti

Bod volby: z uzlu grafu vede více hran

- máme na výběr, kterou hodnotu přiřadíme proměnné

CSP má **řešení bez navracení** vzhledem k uspořádání d, jestliže všechny listy v jeho grafu stavového prostoru reprezentují řešení.

- v grafu nejsou žádné slepé větve

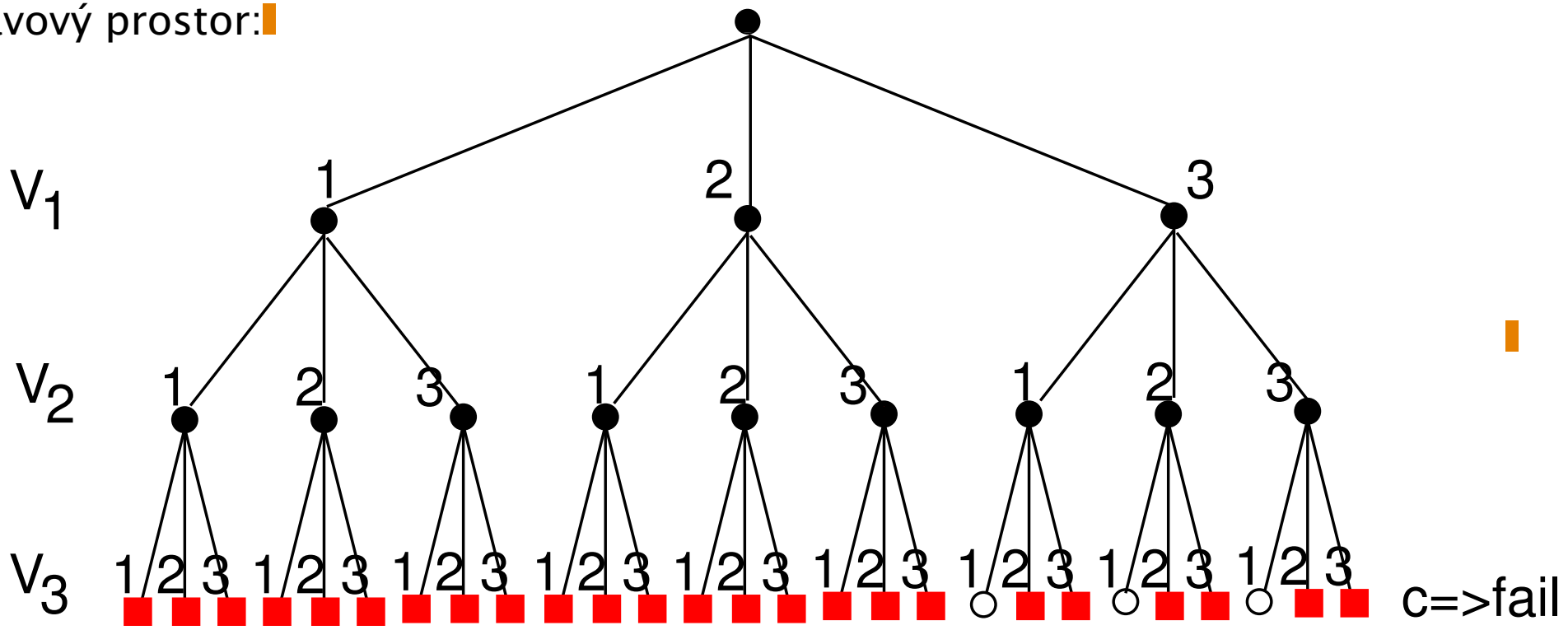


Backtracking (BT)

- **Prohledávání stavového prostoru do hloubky**
- Dvě fáze backtrackingu
  - **dopředná fáze**: proměnné jsou postupně vybírány, rozšiřuje se částečné řešení přiřazením konzistentní hodnoty (pokud existuje) pro další proměnnou
  - **zpětná fáze**: pokud neexistuje konzistentní hodnota pro aktuální proměnnou algoritmus se vrací k předchozí přiřazené hodnotě
- Proměnné dělíme na
  - **minulé** – proměnné, které už byly vybrány (a mají přiřazenu hodnotu)
  - **aktuální** – proměnná, která je právě vybrána a je jí přiřazována hodnota
  - **budoucí** – proměnné, které budou vybrány v budoucnosti

Příklad: backtracking

- Příklad: $V_1, V_2, V_3 \in \{1,2,3\}, \quad c : V_1 = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



Příklady vizualizací viz http://www.fi.muni.cz/~hanka/vis

- zpětná vazba k této bakalářská práci?
- viz kontakt na stránkách

Algoritmus backtrackingu

```
procedure Backtracking((X,D,C))
i := 1                          (inicializace čítače proměnných)
D'_i := D_i                     (kopírování domény)
while 1 ≤ i ≤ n
      přiřazení x_i := Select-Value
      if x_i is null            (žádná hodnota nebyla vrácena)
         i := i − 1             (zpětná fáze)
      else i := i + 1           (dopředná fáze)
           D'_i := D_i
if i = 0 return ,,nekonzistentní''
else return přiřazené hodnoty {x_1,...,x_n}
end Backtracking
```

- Algoritmus vrací pouze první řešení
- Série domén D'_i: $\forall\, i : D'_i \subseteq D_i$.

  Select-Value pracuje nad (promazává) D'_i

  Hodnoty v D'_i ještě netestovány vzhledem k aktuálnímu částečnému přiřazení

Uspořádání hodnot pro backtracking

- procedure Select-Value
  while D'_i is not empty
    vyber a smaž libovolný $a \in D'_i$
    if Consistent($\vec{a}_{i-1}, x_i = a$) return a
  return null
- Backtracking ověřuje v každém kroku konzistenci podmínek vedoucích z minulých proměnných do aktuální proměnné
- Backtracking tedy zajišťuje konzistenci podmínek
  - na všech minulých proměnných
  - na podmínkách mezi minulými proměnnými a aktuální proměnnou

Problémy a vylepšení backtrackingu

- ***Thrashing***: opakované objevování stejných nekonzistencí a částečných úspěchů při prohledávání
- **Algoritmy pohledu dopředu** kontrolují podmínky dopředu
  - backtracking odhalí nesplnění podmínky teprve když přiřadí hodnoty jejím proměnným
    příklad: `A,B,C,D,E in 1..10, A=3*E`
    konzistenčními algoritmy lze předem upravit domény A a E
- **Backjumping** se vrací k původci chyby
  - příklad: `A,B,C,D,E in 1..10, A>E`
    backtracking vyzkouší všechny možnosti pro `B,C,D` než odhalí $A \neq 1$
    hned po prvním neúspěšném přiřazení E se lze vrátit k přiřazování A
- **Dynamický backtracking:** změna uspořádání minulých proměnných
- **Neúplná prohledávání**: hledání pouze v některých částech stavového prostoru

Algoritmy pohledu dopředu (*look-ahead*) LA

- Používají propagace omezení
- Vyvolány před přiřazováním hodnoty další proměnné
- Snaží se zjistit, jak rozhodnutí o výběru proměnných a hodnot ovlivní budoucí prohledávání
- Po provedení propagace omezení lze mnohem lépe
  - rozhodnout, **kterou proměnnou přiřadit**
    - většinou lepší přiřadit proměnné, které nejvíce omezují zbytek stavového prostoru
    - příklad: `A,B,C,D,E in 1..10, D=A*B*C*E, E>5`, lépe je začít s E
  - rozhodnout, **kterou hodnotu přiřadit proměnné**
    - snaha o výběr hodnoty, která umožní nejvíce voleb v budoucích přiřazeních
    - příklad: `A,B,C in 1..10, A*B<10, B=C*2`, pro A je lepší vybrat 1
- Vylepšení složitosti nejhoršího případu oproti naivnímu backtrackingu zřídka. Cílem je snaha o efektivní využití algoritmů propagace omezení.

Pohled dopředu pro výběr hodnoty

```
procedure Look-Ahead((X,D,C))                          rozdíly od backtrackingu
i := 1                          (inicializace čítače proměnných)
D'_i := D_i pro 1 ≤ i ≤ n        (kopírování domény)
while 1 ≤ i ≤ n
      přiřazení x_i := Select-Value-XXX
      if x_i is null            (žádná hodnota nebyla vrácena)
         i := i − 1             (zpětná fáze)
         nastav všechny D'_k, k > i na jejich hodnotu před poslední instanciací x_i
      else i := i + 1           (dopředná fáze)
if i = 0 return ,,nekonzistentní''
else return přiřazené hodnoty {x_1,...,x_n}
end Look-Ahead
```

- Select-Value-XXX se liší dle typu LA algoritmu
- Ukládáno n kopií každé D'
  - pro každou úroveň ve stavovém prostoru jedna kopie

Kontrola dopředu (*forward checking*) FC

- procedure Select-Value-Forward-Checking

  while D'_i is not empty

  vyber a smaž libovolný $a \in D'_i$

  for $\forall k,\ i < k \leq n$

  for $\forall b \in D'_k$

  if not Consistent$(\vec{a}_{i-1}, x_i = a, x_k = b)$

  smaž b z D'_k

  if $\exists k, i < k \leq n : D'_k$ is empty ($x_i = a$ vede do slepé větve, nevybírej a)

  nastav všechny $D'_k, i < k \leq n$ na hodnotu před výběrem a

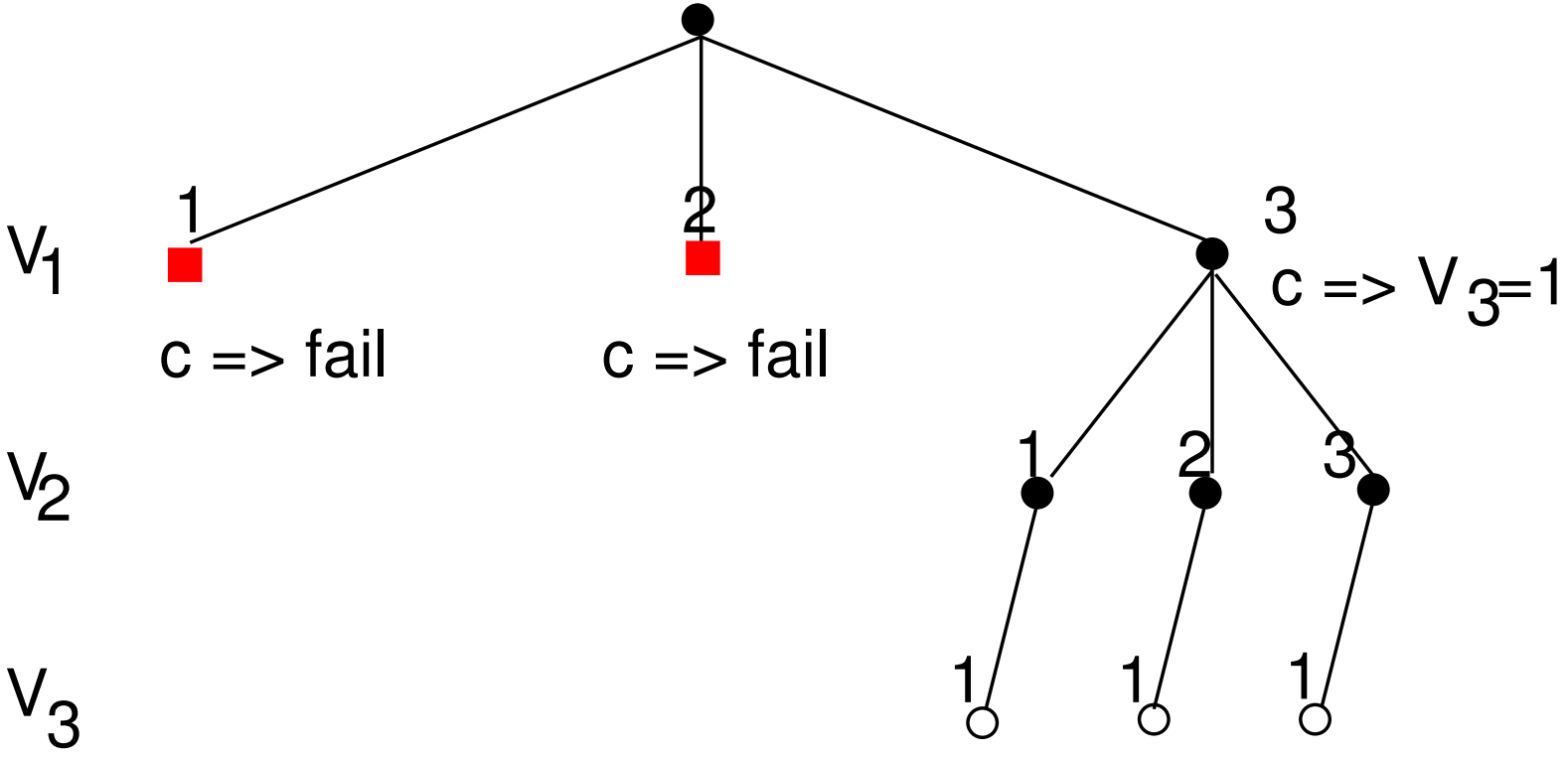
  else return a

  return null

- FC je rozšíření backtrackingu
- FC navíc zajišťuje konzistenci mezi aktuální proměnnou a budoucími proměnnými, které jsou s ní spojeny dosud nesplněnými podmínkami
- Hrany z aktuální proměnné do minulých proměnných není nutno testovat

Příklad: kontrola dopředu

- Příklad: $V_1, V_2, V_3 \in \{1, 2, 3\}, \quad c : V_1 = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



Opravdový úplný pohled dopředu (RFLA)

procedure Select-Value-Look-Ahead

while D'_i is not empty

vyber a smaž libovolný $a \in D'_i$

repeat Deleted := false

for $\forall j,\ i < j \leq n$

for $\forall k,\ i < k \leq n$

for $\forall b \in D'_j$

if neexistuje $c \in D'_k$ taková, že

Consistent$(\vec{a}_{i-1}, x_i = a, x_j = b, x_k = c)$

smaž b z D'_j

Deleted := true

until Deleted = false

if $\exists k, i < k \leq n$ takové, že $D_k = \emptyset$ (nevybírej a)

nastav všechny $D'_j, i < j \leq n$ na hodnotu před výběrem a

else return a

return null

(Real Full) Look-Ahead, RFLA n. LA

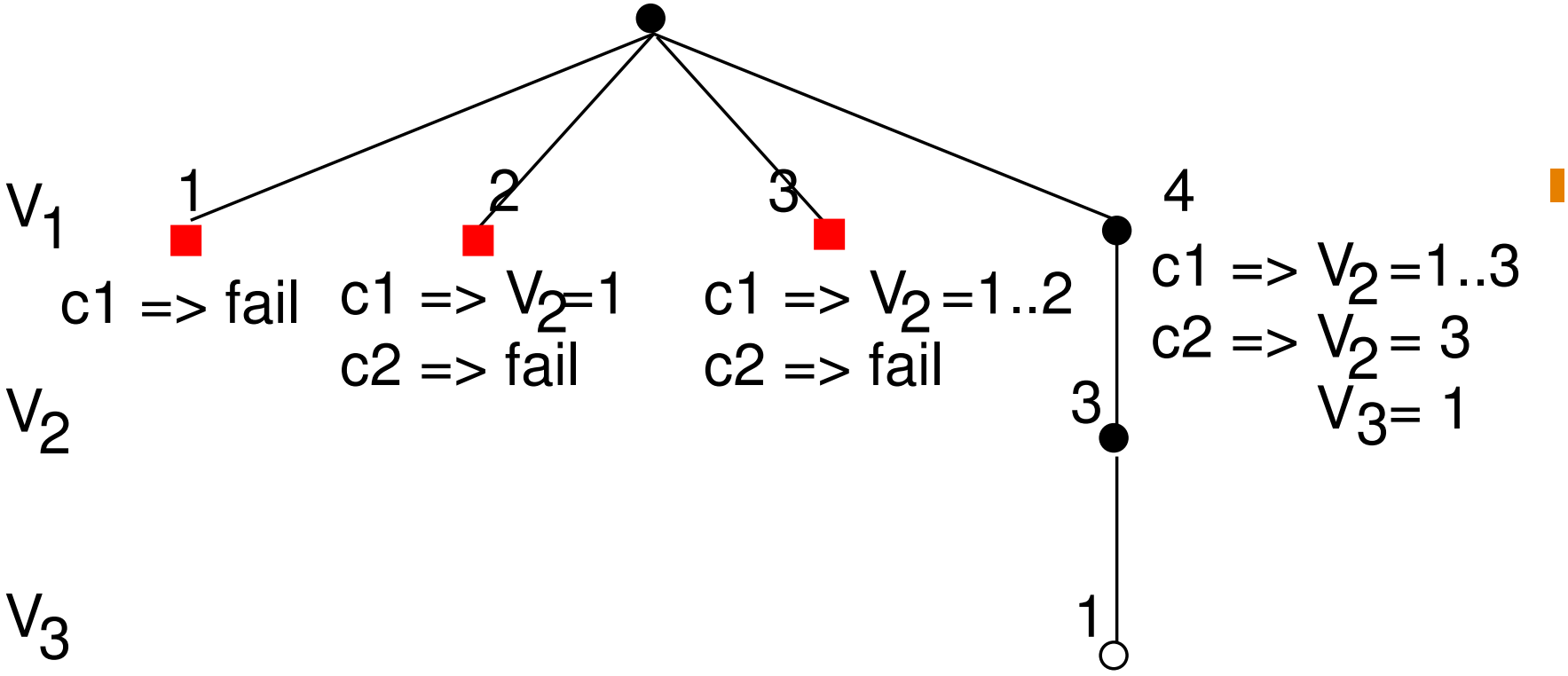
n. Maintaining Arc-Consistency MAC

Implementace AC-1 algoritmu

Lze nahradit silnějšími AC algoritmy

Příklad: pohled dopředu

- Příklad: $V_1, V_2, V_3 \in \{1, 2, 3\}, \quad c1 : V_1 > V_2, \quad c2 : V_2 = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



Prohledávání s iniciální konzistencí

Prohledávací algoritmus často aplikován až po **zajištění iniciální konzistence**

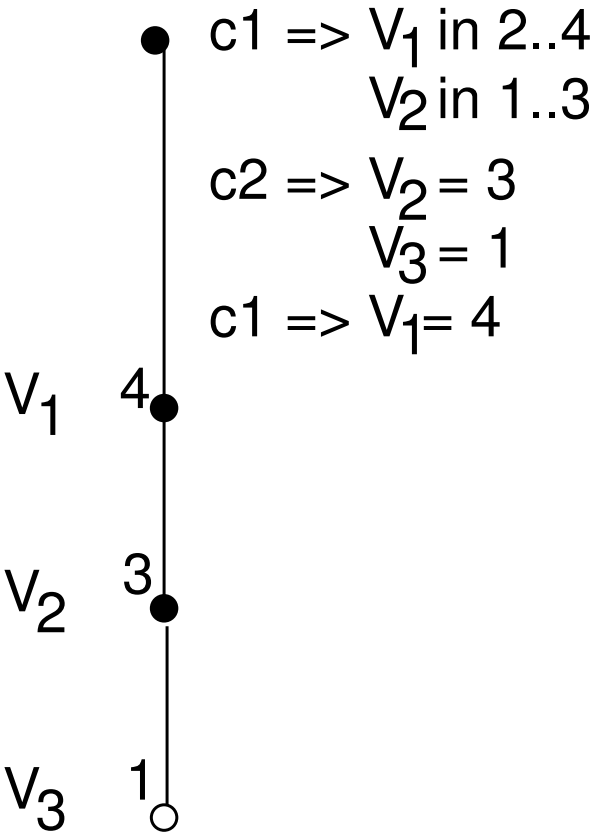
- typicky: iniciální konzistence a pak kontrola dopředu nebo

  iniciální konzistence a pak pohled dopředu

Příklad:

- pohled dopředu + iniciální konzistence
- V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 4$

  $c1 : V_1 > V_2, \quad c2 : V_2 = 3 \times V_3$



Srovnání algoritmů

- **Backtracking (BT)** kontroluje v kroku a podmínky

  $c(V_1, V_a), \ldots, c(V_{a-1}, V_a)$

  z minulých proměnných do aktuální proměnné

- **Kontrola dopředu (FC)** kontroluje v kroku a podmínky

  $c(V_{a+1}, V_a), \ldots, c(V_n, V_a)$

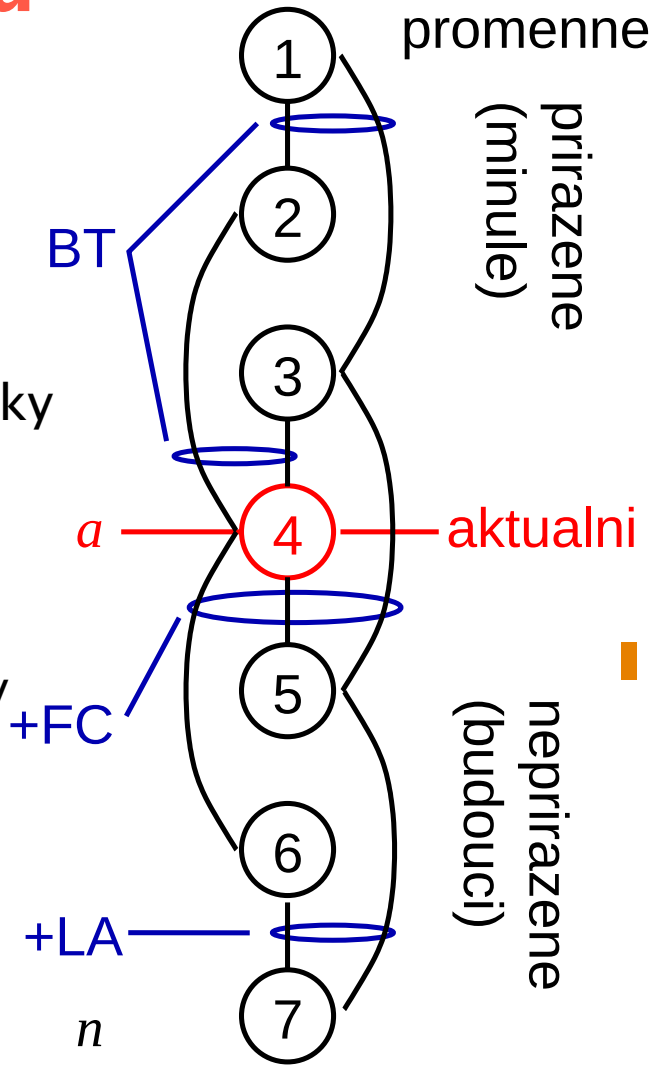
  z budoucích proměnných do aktuální proměnné

- **Pohled dopředu (LA)** kontroluje v kroku a podmínky

  $\forall l(a \leq l \leq n), \forall k(a \leq k \leq n), k \neq l : c(V_k, V_l)$

  z budoucích proměnných do aktuální proměnné

  a mezi budoucími proměnnými



- **Cvičení:** porovnejte jednotlivé algoritmy pro příklad $V_1, V_2, V_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $V_1 = V_2 * 2, V_3 = V_2 + 1$, nakreslete odpovídající stavový prostor a u každého stavu uveďte, ke kterým propagacím omezení dochází.

Shrnutí: pohledu dopředu pro výběr hodnoty

- **Kontrola dopředu (*forward checking*) FC**
  - FC zajišťuje konzistenci mezi aktuální proměnnou a budoucími proměnnými, které jsou s ní spojeny dosud nesplněnými podmínkami
- **Opravdový úplný pohled dopředu (*real full look-ahead*) RFLA**
  - často se odkazuje: LA algoritmus **RFLA=LA** nebo **Maintaining Arc-Consistency MAC**
  - LA je rozšíření FC, LA zajišťuje hranovou konzistenci
  - LA navíc ověřuje i konzistenci všech hran mezi budoucími proměnnými
- **Úplný pohled dopředu (*full look-ahead*) FLA**
  - pouze jeden průchod `repeat until` cyklem algoritmu
- **Částečný pohled dopředu (*partial look-ahead*) PLA**
  - pouze jeden průchod `repeat until` cyklem algoritmu
  - nahrazuje `for` $\forall k, k \neq j, i < k \leq n$ výrazem `for` $\forall k, j < k \leq n$

    tj. budoucí proměnné porovnávány pouze s těmi, které je následují (DAC)

Výběr hodnoty

Jakým způsobem vybírat ze zbývajících hodnot v doméně proměnné?

- Triviální výběr hodnoty
  - doména procházena ve vzrůstajícím pořadí
  - doména procházena v klesajícím pořadí
- Obecný princip výběru hodnoty: **první úspěch *(succeed first)***
  - volíme pořadí tak, abychom výběr nemuseli opakovat
  - ?- $A, B, C \in \{1, 2\}, A = B + C$

    optimální výběr $A = 2, B = 1, C = 1$ je bez backtrackingu

Pohled dopředu pro dynamický výběr hodnoty

- Výběr hodnoty v doméně proměnné
  - zatím jsme vybírali první konzistentní hodnotu - jednalo se o **statický výběr hodnoty**
  - místo toho zkusíme proměnné přiřadit každou z hodnot v doméně a vyzkoušíme efekt použití FC nebo jiného LA algoritmu
- **Minimální konflikt**
  - výběr hodnoty, která smaže nejmenší počet hodnot z domén budoucích proměnných
  - experimentálně: tato heuristika vykazuje velmi dobré výsledky
- **Maximální velikost domény**
  - výběr hodnoty, která způsobí vytvoření největší minimální velikost domény mezi všemi budoucími proměnnými
  - intuice: proměnné, které mají malé domény, způsobí pravděpodobněji nekonzistenci

Výběr proměnných: statický

Uspořádání (výběr) proměnných má velký vliv na velikost stavového prostoru

- **Statické uspořádání proměnných:** výběr proměnných dán předem
  - triviálně: výběr nejlevější proměnné (tj. proměnné s nejmenším indexem)
  - empirické i teoretické studie ukázaly, že některá statická uspořádání vedou obecně ke zmenšení velikost stavového prostoru
- **Maximální kardinalita**
  - první proměnnou (uzel grafu) vybereme náhodně
  - každý uzel je spojen s maximálním počtem už uspořádaných (= dříve vybraných) vrcholů
  - proměnné vybíráme v pořadí dle tohoto počtu vrcholů
- **Minimální šířka**
  - proměnné uspořádány tak, aby byla minimalizována šířka grafu (minimalizován počet zpětných hran)
  - odzadu vybíráme proměnné s nejmenším počtem hran v aktualizovaném grafu (algoritmus viz dříve)

Výběr proměnných: dynamický

- **Dynamické uspořádání proměnných:** výběr proměnných počítán až v průběhu prohledávání
  - lze využít (výpočtů) algoritmů pohledu dopředu
- ***First-fail***
  - velmi často používaná metoda (vhodná jako default)
  - výběr proměnné, která nejvíce omezí zbytek stavového prostoru
  - výbereme proměnnou **s nejmenší doménou**
  - později už by mohlo být těžší pro tuto proměnnou nalézt správnou hodnotu
  - kombinace first-fail a maximální kardinality
  - $A, B, C \in \{1, 2, 3\}, A < 3, A = B + C$ nejlépe je začít s výběrem A

Pohled dopředu pro dynamický výběr proměnné

procedure Var-Ord-Look-Ahead((X, D, C)) rozdíly od Look-Ahead

i := 1 (inicializace čítače proměnných)

D'_i := D_i pro $1 \leq i \leq n$ (kopírování domény)

s := $\min_{1 \leq j \leq n} \| D'_j \|$ (nalezni proměnnou s nejmenší doménou)

$x_1 := x_s$ (přeskládej proměnné tak, aby x_s byla první)

while $1 \leq i \leq n$

přiřazení x_i := Select-Value-XXX

if x_i is null (žádná hodnota nebyla vrácena)

$i := i - 1$ (zpětná fáze)

nastav všechny $D'_k, k > i$ na jejich hodnotu před poslední instanciací x_i

else if $i < n$

s :=$\min_{i < j \leq n} \| D'_j \|$ (nalezni budoucí proměnnou s nejmenší doménou)

$x_{i+1} := x_s$ (přeskládej proměnné tak, aby x_s následovala x_i)

$i := i + 1$ (dopředná fáze)

if $i = 0$ return ,,nekonzistentní''

else return přiřazené hodnoty $\{x_1, \ldots, x_n\}$

end Var-Ord-Look-Ahead

Silnější pohled dopředu

- Algoritmy pohledu dopředu zatím uvažovaly pouze hranovou konzistenci
  - vede k mazání hodnot z domény
- Po každém přiřazení hodnoty proměnné lze vyžadovat dosažení vyššího stupně konzistence
  - navíc jsou přidávána i nová omezení
- Kdy má cenu vyšší úrovně konzistence uvažovat?
  - vhodné pro propagaci nad podmnožinou proměnných
    - globální podmínky
  - nebo při rozhodování o výběru hodnoty
    - nepřidáváme nová omezení

Doplňkové materiály

Course on Constraint Programming and Scheduling (10 hodin)

- bakalářský kurz vyučovaný v angličtině na Hochschule Konstanz, Technik, Wirtschaft,und Gestaltung (Německo) v květnu 2009
- http://www.fi.muni.cz/~hanka/konstanz09/
- propagace, prohledávání, modelování, příklady
- omezující podmínky
- použití omezujících podmínek pro rozvrhování

Část přednášky *Constraint Programming: Search*

- algoritmy v rekurzivním pseudokódu
- příklady prohledávání stavového prostoru včetně řešení