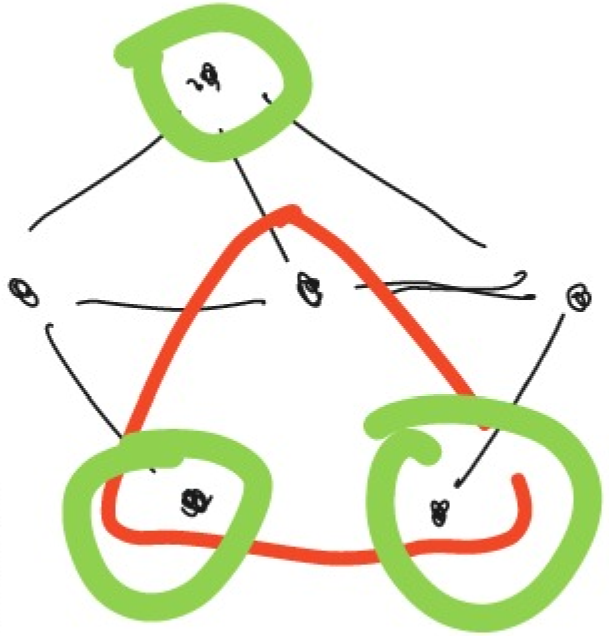
8.9 Řekneme, že podmnožina vrcholů neorientovaného grafu G je *nezávislá*, pokud žádná dvojice vrcholů z této podmnožiny není spojená hranou. Ukažte, že problém

$$INDSET = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ je graf s podmnožinou alespoň } k \text{ nezávislých vrcholů}\}$$

je NP-úplný.

- NP-těžký
- INDSET $\in$ NP



$\Longrightarrow \langle G, 3\rangle \in INDSET$

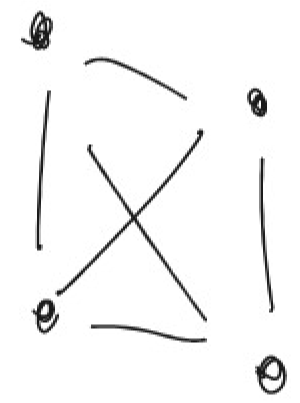
$A \leq_p INDSET \wedge A$ je NP-těžký / všechny $A \in NP$: $A \leq_p INDSET$

- INDSET $\in$ NP
  1) Nedeterministicky zvolím k vrcholov I
  2) Overím že medzi dvojicami $x, y \in I$ nevedú hrany. ($\{x,y\} \notin E$)
- INDSET je NP ťažký

SAT ✗ 3SAT ✗ CLIQUE ✓ $= \{ \langle G, k \rangle \mid G$ obsahuje úplný podgraf veľkosti aspoň $k \}$

CLIQUE $\leq_p$ INDSET

(v poly. čase na det. stroji) $f(\langle G, k \rangle) \rightarrow \langle G', k \rangle$



$G = (V, E)$ $\quad \langle G, k \rangle \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow \langle G', k \rangle \in$ INDSET

$G' = (V, E')$ $\hookrightarrow \{x,y\} \in E' \Leftrightarrow \{x,y\} \notin E$

(ak bola v E, v E' odoberiem, ak nebola v E, v E' pridám)

$$f(x) = \begin{cases} \langle G', k \rangle & x \text{ kóduje dvojicu } \langle G, k \rangle \\ x & \text{inak} \end{cases}$$

x nekóduje $\langle G, k \rangle \Rightarrow x \notin$ CLIQUE $\wedge$ $x \notin$ INDSET

$E' = \emptyset$

for $(x,y) \in V \times V$:
  if $\{x,y\} \notin E$:
    $E' = E' \cup \{x,y\}$

$\Rightarrow$ polynomiálna zložitosť

8.10 Ukažte, že problém

$$DOUBLESAT = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ je výroková formule splněná alespoň dvěma různými přiřazeními}\}$$

je NP-úplný.

- DSAT $\in$ NP
  - Nedeterministicky zvolím přiřazení x_1 a x_2 (tž. $x_1 \neq$
  - Ověřím $x_1 \models \varphi$ $x_2 \models \varphi$
- DSAT je NP těžký

SAT / 3SAT

$SAT = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ je splnitelná $\}$
(existuje aspoň jedno splň. přiřazení)

$SAT \leq_p DSAT$ $\quad f(\langle\varphi\rangle) = \langle\varphi'\rangle$

$\langle\varphi\rangle \in SAT \iff \langle\varphi'\rangle \in DSAT$

$\cancel{\varphi' = \varphi \vee (z)}$

↳ nové premenné

φ má splň. val. 'v' tak φ' má s.v. $(v + (z=0))$

a $(v + (z=1))$

$\varphi \in SAT \Rightarrow \varphi' \in DSAT$ ✓

$\varphi \notin SAT \Rightarrow \varphi' \notin DSAT$ ✗

ak v t.ž. $v \not\models \varphi$

tak $(v + (z=1)) \models \varphi'$

$\Downarrow$

$\varphi' = \varphi \vee 1 = 1$

$\varphi' = \varphi \wedge (z_1 \vee z_2)$ → dá sa implementovať s poly zložitosťou

$\varphi \notin SAT \overset{?}{\Rightarrow} \varphi' \notin DSAT$

Ak v je valuácia φ t.ž. $v \not\models \varphi$

$(v + (z_1 = 0) + (z_2 = 0)) \not\models \varphi$

— " — pre $z_1 = 1$ $z_2 = 0$ a 0/1 a 1/1

$\varphi \in SAT \Rightarrow \varphi' \in DSAT$

Nech v t.ž. $v \models \varphi$, potom $(v + (z_1 = 0) + (z_2 = 1)) \models \varphi'$

$(v + (z_1 = 1) + (z_2 = 0)) \models \varphi'$

— " — 1/1

8.11 Ukažte, že problém

$$HALFCLIQUE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ je graf } \lceil m/2\rceil\text{-klikou, kde } m \text{ je počet vrcholů v } G\}$$

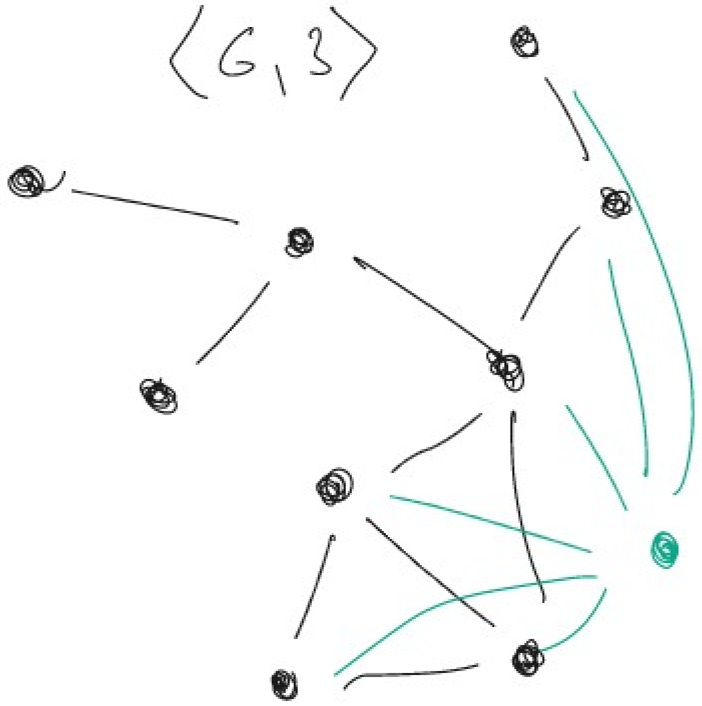
je NP-úplný. "HC

- $HC \in NP$ ✓ Uhádnem kliku, overím že je správna
- HC je NP ťažký $CLIQUE \leq_p HALFCLIQUE$

$f(\langle G,k\rangle) = G'$ t.ž.

$(G,k) \in CLIQUE \iff G' \in HC$

$\langle G, 3\rangle$



$\lceil \frac{9}{2} \rceil = 5$

k	$\|V\|$
4	10
5	11
6	12

$$f(\langle G,k\rangle) = \begin{cases} ((a,b,c),(c)) & k > |V| \\ G \text{ ak } & k = \lceil m/2 \rceil \\ k > \lceil m/2 \rceil & \text{pridám } n \text{ vrcholov tak aby } k = \left\lceil \frac{(n+m)}{2} \right\rceil \text{ a nepridám žiadne hrany} \end{cases}$$

$m = |V|$

$k < \lceil m/2 \rceil$ pridám n vrcholov tak $k+n = \left\lceil \frac{(n+m)}{2} \right\rceil$ a ~~hrany~~ všetky hrany medzi novými, a medzi novými a starými vrcholmi.

$k+n = \frac{(n+m)+1}{2}$

$2k + 2n = n+m+1$

$\vdots$

$n = \dots$

- f je poly. implementovateľná

8.10 Ukažte, že pr

DOUBLESA

je NP-úplný.

- DSAT ∈
- DSAT

miro