2.1 Nechť $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je univerzální funkce pro množinu všech unárních vyčíslitelných funkcí. Kolik indexů má Φ? Vaši odpověď zdůvodněte!

$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \ldots$ – numerácia while programov

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6 \ldots$ – numerácia vyčísl. funkcií

$\forall$ vyč. fcia $\Rightarrow \infty$ veľa indexov

Φ je vyčísliteľná $\quad \Phi(e, x) = \varphi_e(x)$

$\Rightarrow \Phi$ má ∞ veľa indexov.

2.2 Nechť P_e je program, který počítá univerzální funkci $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Ukažte, že výsledek výpočtu programu P_e pro vstupní vektor (e, a) je stejný jako výsledek výpočtu P_e pro vstupní vektor $(a, 0)$ pro libovolné $a \in \mathbb{N}$.

Chcem: $\forall a \in \mathbb{N}$: $\overset{\text{nad}}{P_e}(e, a) = \overset{\text{nad}}{P_e}(a, 0)$ (P_e počítá Φ)

$\Phi(e, a) = \Phi(a, 0)$???

$$\varphi_e(e, a) = \underline{\underline{\Phi(e, a)}} = \varphi_e(a) = P_e \text{ nad } (a)$$

$$= P_e \text{ nad } (a, 0) = \Phi(a, 0) = \varphi_a(0)$$

2.4 Definujme obecněji pojem *univerzální* funkce následovně. Nechť $\mathcal{F}$ je třída $j-$árních funkcí, ne nutně vyčíslitelných. Univerzální funkce $F : \mathbb{N}^{j+1} \to \mathbb{N}$ pro $\mathcal{F}$ je funkce splňující následující dvě podmínky:

(a) Pro každé pevné $e \in \mathbb{N}$ patří $j-$ární funkce $F(e, x_1, \dots, x_j)$ do $\mathcal{F}$.

(b) Ke každé funkci $f(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{F}$ existuje $e \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $x_1, \dots, x_j \in \mathbb{N}$:

$$F(e, x_1, \dots, x_j) = f(x_1, \dots, x_j)$$

Pro jednoduchost předpokládejme $j = 1$.

(a) Definujte univerzální funkci pro třídu funkcí $\mathcal{F} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

(b) Definujte univerzální funkci pro třídu funkcí $\mathcal{F} = \{x, x^3, x^5, \dots\}$.

(c) Ukažte, že každá konečná třída funkcí $\mathcal{F}$ má univerzální funkci F.

a) $F(e, a) = a^e$

$F(0, a) = a^0 = 1$

$F(1, a) = a^1 = x$

$F(2, a) = a^2 = x^2$

$\vdots$

b) $F(e, a) = a^{(2e+1)}$

$F(0, a) = a^1$

$F(1, a) = a^3$

$F(2, a) = a^5$

$\vdots$

c) $\mathcal{F} = \{f_0 \dots f_n\}$ $\quad F(e, a) = ??$

$$F(e, a) = \begin{cases} f_e(a) & e \leq n \\ f_1(a) & e > n \end{cases}$$

$$F(e, a) = f_{(e \bmod n)}(a)$$

Ak $\mathcal{F}$ je prázdne, F neexistuje

2.5 Použijeme definici univerzální funkce z cvičení 2.4.

(a) Nechť $\mathcal{F}$ je třída totálních unárních funkcí nad $\mathbb{N}$, která má univerzální funkci $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Dokažte, že pak existuje totální unární funkce, která nepatří do $\mathcal{F}$.

(b) Dokažte, že třída *všech* totálně vyčíslitelných unárních funkcí nad $\mathbb{N}$, nemá *vyčíslitelnou* univerzální funkci.

(c) Definujte nekonečnou třídu totálně vyčíslitelných funkcí, která má vyčíslitelnou univerzální funkci.

c) $\mathcal{F} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ $\qquad F(e, a) = a^e$

potrebujem nažto na mocniny

a) $\mathcal{F}$ – tot. unárne fcie

F – univ. fcia pre $\mathcal{F}$

Chcem: tot. unárna fcia t.ž. nepatrí do $\mathcal{F}$

$\omega(x) = ??$ $\qquad \forall f \in \mathcal{F} : \exists x : \omega(x) \neq f(x)$

$\omega(x) = \underbrace{f_x(x)}_{???} + 1 \qquad \omega(x) = F(x, x) + 1$

b) $\mathcal{F}$ – všetky totálne vyč. unárne fcie $f_x(x)$

F – univ. fcia

Chceme: F nie je vyčísliteľná.

Spor. Predpoklad: F je vyčísliteľná.

$\omega(x) = F(x, x) + 1$ – ω je unárna

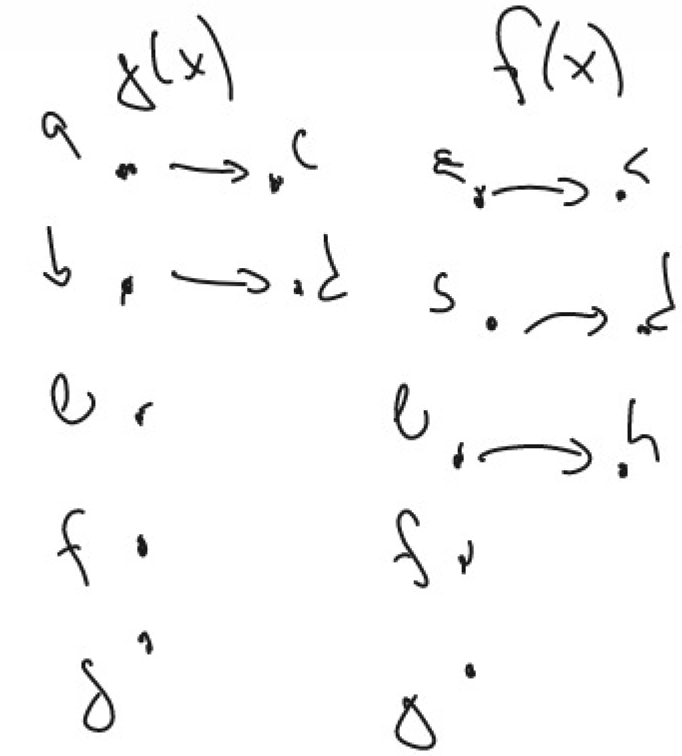
– ω je totálna (lebo F je totálna)

– ω je vyčísliteľná

$\Downarrow$ (podľa a) $\qquad\qquad \Downarrow$

$\omega \notin \mathcal{F}$ $\qquad$ Spor $\qquad$ $\omega \in \mathcal{F}$

2.9 Nechť $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je univerzální funkce. Ukažte, že funkce $\psi(x) = \Phi(x, x)$ nemůže být rozšířena na totální vyčíslitelnou funkci.
Řekneme, že f je *rozšířením* g, píšeme $g \leq f$, jestliže kdykoliv je $g(x)$ definováno, pak je definováno i $f(x)$ a $f(x) = g(x)$.



$\psi(x) = \Phi(x, x)$ – nie je totálna

Sporom: Predpoklad: existuje γ t. ž.

$\psi \leq \gamma$ a γ je tot. a vyčísliteľná.

$\omega(x) = \gamma(x) + 1 \longrightarrow$ ω je totálna

ω je vyč.

$\Downarrow$

existuje index pre ω

$\omega = \varphi_i$

$\omega(i) = ?$

$\underline{\omega(i)} = \gamma(i) + 1 = \Phi(i, i) + 1 = \psi(i) + 1$

$= \underline{\varphi_i}(i) + 1 = \underline{\omega(i) + 1}$

Spor: $\omega(i) = \omega(i) + 1$