$x = 9000$

$$\begin{array}{cccccccccc} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(n) & f(n+1) \end{array}$$

$2 < 3 < 10 < 12 < \dots 10000$

$1 < 5 < 1000 < 25^{20} \dots 2^{210}$

A je R.E. $\Rightarrow f$ je TV

$A = \text{range}(f)$

↳ obor hodnot

3.1 Nechť A je nekonečná r.e. množina, pro jejíž numerující funkci f platí: 3.3

$$\text{pro všechna } n \geq 0 : \underbrace{f(2n+3) > f(2n+1)}_{\text{liché vstupy}} \text{ a } \underbrace{f(2n+2) > f(2n)}_{\text{sudé vstupy}}$$

Dokažte, že A musí být rekurzívní.

A je rekurzivna $\Leftrightarrow f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

↳ totálne vyčíslitelné

$$\left[\; f(n) > x \wedge f(n+1) > x \Rightarrow \forall m > n : f(m) > x \;\right]$$

```
input x:
    n = 0
    repeat
        y1 = f(n)       // sudý vstup
        y2 = f(n+1)     // lichý vstup
        n = n+2
        if x = y1 ∨ x = y2 then
            return 1
    until y1 > x ∧ y2 > x
    return 0
```

miro

A je R.E.

Existuje generujúci program

⇒ používa OUTPUT(x)

⇓

musí vygenerovať všetky prvky z A

$a_i \in A$

$f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$ ...

a_0 a_1 a_2 a_3

enumerable

?

$(n+1)$

A je R.E.:

∃ numerácia f t.ž.:

- range$(f) = A$
- f je TVF

alebo $A = \emptyset$

A je R.E.

∃ vyčíslitelná f, „čiastočne rozhoduje“ A

domain$(f) = A$

Program pre $f(x)$ zastaví

$\left(f(x) \text{ zastaví} \Leftrightarrow x \in A \right)$

$f(x) \neq \bot \Leftrightarrow x \in A$

3.3 Použijte techniku “paralelního zpracování” k důkazu toho, že následující množiny jsou rekurzívně spočetné:

(a) $\{i \mid \varphi_i \neq \epsilon\}$, kde ϵ je prázná funkce, →

(b) $\{i \mid \varphi_i$ není prostá$\}$,

(c) $\{i \mid \varphi_i$ není konstantní funkce$\}$,

(d) $\{n \mid a \in \mathrm{dom}(\varphi_n)\}$, pro pevné $a \in \mathbb{N}$,

(e) $\{n \mid a \in \mathrm{range}(\varphi_n)\}$, pro pevné $a \in \mathbb{N}$.

$y = \pi_2(\tau(x,y))$

$x = \pi_1(\tau(x,y))$

(x,y,z)

$(x,(y,z))$

(c) $\{n \mid a \in \operatorname{range}(\varphi_n)\}$, pre pevné $a \in \mathbb{N}$.

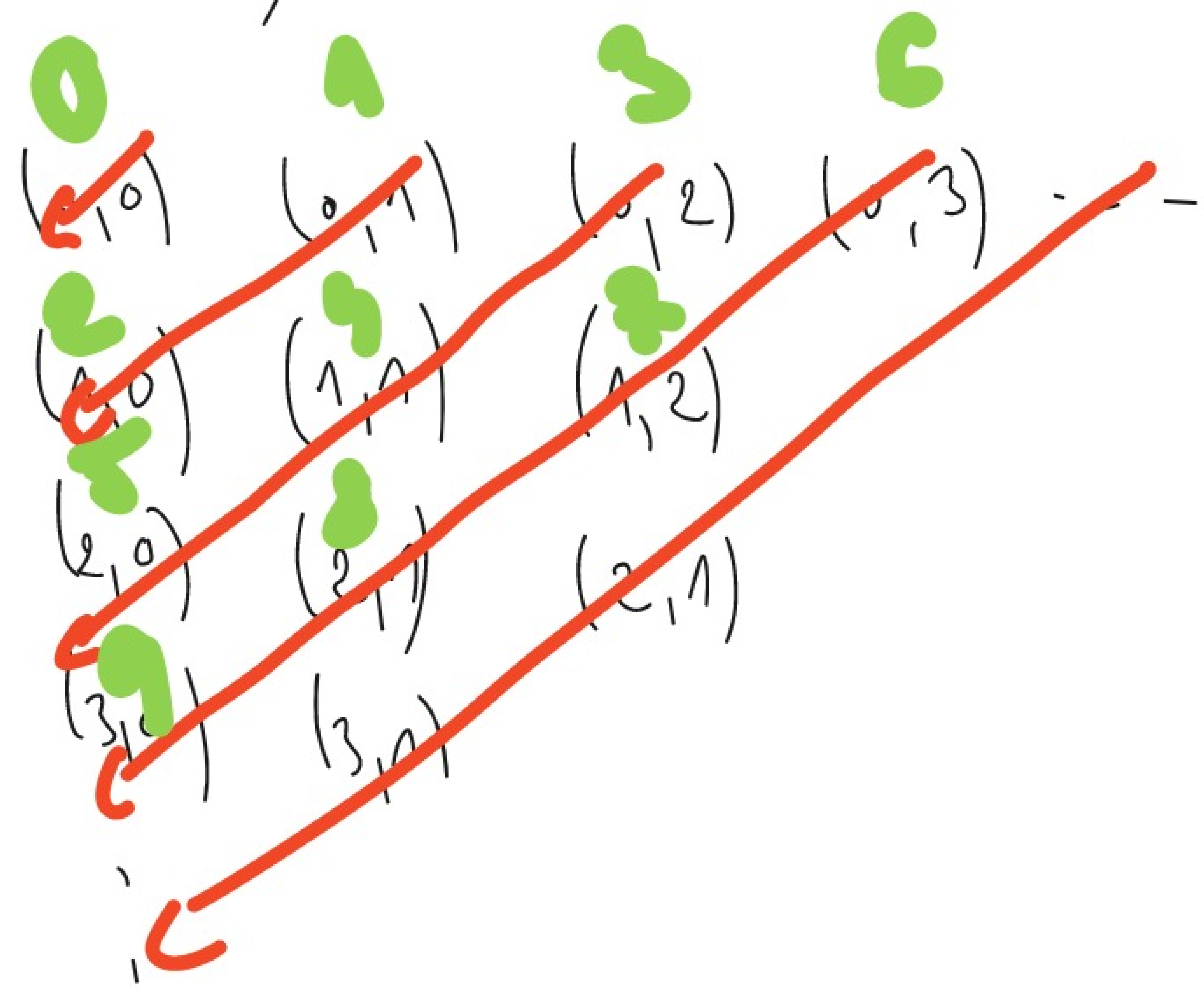
a) [Generátor]

$\tau(x, y) = z$

$\tau(2, 1) = 8$

$\pi_1(8) = 2$

$\pi_2(8) = 1$



```
i = 0
while true:
    f = π1(i)          / fcia
    x = π1(π2(i))      / vstup
    n = π2(π2(i))      / # krokov
    if Sc(f, x, n) = 1 then
        OUTPUT(f)
    i = i+1
```

[čiastočná rozhodovacia fcia]

input f: fcia (→ index) (chcem zastaviť až f je neprázdna)

```
i = 0
while Sc(f, π1(i), π2(i)) = 0      (π1(i) ↑ vstup, π2(i) ↗ # krokov)
    i = i+1
```

[numerujúca fcia]

Nech z je prvok z A, napr. indentitu (f(x)=x)

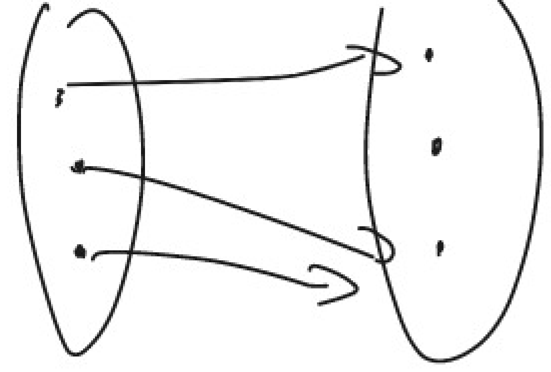
input i:

```
f = π1(i)
x = π1(π2(i))
n = π2(π2(i))
if Sc(f, x, n) = 1 then
    return f
else
    return z
```

A

B

b) $A = \{ i \mid \varphi_i \text{ nie je prostá} \}$



$i = 0$

while true

- $i = i+1$
- $f = \pi_1(\pi_1(i))$
- $x_1 = \pi_2(\pi_1(i))$
- $x_2 = \pi_1(\pi_2(i))$
- $n = \pi_2(\pi_2(i))$
- if $Sc(f, x_1, n) = 1 \wedge Sc(f, x_2, n) = 1 \wedge \Phi(f, x_1) = \Phi(f, x_2) \wedge x_1 \neq x_2$ then
  - OUTPUT(f)

$(0,0,0,0)$

$(0,f,0,1)$

#

lazy vyhodnocovanie

e) $A = \{ i \mid a \in range(\varphi_i) \}$ pre pevné $a \in \mathbb{N}$

[čiastočná fcia]

input i:

$j = 0$

while $Sc(i, \pi_1(j), \pi_2(j)) = 0 \vee \Phi(i, \pi_1(j)) \neq a$

- $j = j+1$

$(x, \cancel{s}, e)$

$B = \{ (i, \cancel{x, n}) \mid \varphi_i(x)$ zastaví do n krokov a $\varphi_i(x) = a \}$

$$f_B((i,x,n)) = \begin{cases} 1 & Sc(i,x,n) = 1 \wedge \Phi(i,x) = a \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$