Diskrétní matematika – cvičení 10. týden

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2020

Příklad

Připomeňme si vzoreček pro kombinační číslo:

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n! \cdot (k-n)!} = \frac{k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdots 1}.$$

Poslední z těchto výrazů dává smysl i pro k reálné (n musí být přirozené – jedná se o počet činitelů). Určete, čemu se rovná $\binom{-k}{n}$.

Příklad

Připomeňme si vzoreček pro kombinační číslo:

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!\cdot(k-n)!} = \frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}.$$

Poslední z těchto výrazů dává smysl i pro k reálné (n musí být přirozené – jedná se o počet činitelů). Určete, čemu se rovná $\binom{-k}{n}$.

Řešení

$$\begin{aligned}\binom{-k}{n} &= \frac{(-k)\cdot(-k-1)\cdots(-k-n+2)\cdot(-k-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}\\ &= (-1)^n\cdot\frac{(k+n-1)\cdot(k+n-2)\cdots(k+1)\cdot k}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}\\ &= (-1)^n\cdot\binom{k+n-1}{n} = (-1)^n\cdot\binom{n+k-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Příklad

Připomeňme si vzoreček pro kombinační číslo:

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n! \cdot (k-n)!} = \frac{k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdots 1}.$$

Poslední z těchto výrazů dává smysl i pro k reálné (n musí být přirozené – jedná se o počet činitelů). Určete, čemu se rovná $\binom{-k}{n}$.

Řešení

$$\begin{aligned}\binom{-k}{n} &= \frac{(-k) \cdot (-k-1) \cdots (-k-n+2) \cdot (-k-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{(k+n-1) \cdot (k+n-2) \cdots (k+1) \cdot k}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= (-1)^n \cdot \binom{k+n-1}{n} = (-1)^n \cdot \binom{n+k-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Příklad

Určete, čemu se rovná $\binom{-1/2}{n}$.

Příklad

Určete, čemu se rovná $\binom{-1/2}{n}$.

Řešení

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)\cdot(-3/2)\cdots(-(2n-1)/2)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\\ &= (-1/2)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\\ &= (-1/2)^n \cdot \frac{\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots(2n)}}{n!} = (-1/2)^n \cdot \frac{\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}}{n!}\\ &= (-1/4)^n \cdot \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = (-1/4)^n \cdot \binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Poznámka

Základem pro nás bude vztah mezi posloupnostmi

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \dots),$$

tzv. (formálními) mocninnými řadami

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots$$

(jedná se jen o jiný zápis posloupnosti) a jim příslušnými *generujícími funkcemi* $f(x)$ – součet mocninné řady. Např.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

tedy e^x je generující funkcí posloupnosti $(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots)$ a $\frac{1}{1-x}$ je generující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Poznámka

Zobecněná binomická věta: pro libovolné reálné k platí

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot x^n.$$

Pojďme toto reinterpretovat s využitím $\binom{-k}{n} = (-1)^n \cdot \binom{n+k-1}{k-1}$:

$$\frac{1}{(1-x)^k} = (1+(-x))^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} \cdot (-x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \cdot x^n$$

Pro $k = 1$ jsou všechna kombinační čísla rovna 1 a dostaneme vzorec pro součet geometrické řady jako speciální případ.

Poznámka

V dalším se nám bude ještě krom součtu nekonečné geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

hodit také vzorec pro součet konečné geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí českých mincí zaplatit platbu $N = 100$, resp. jiné hodnoty?

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí českých mincí zaplatit platbu $N = 100$, resp. jiné hodnoty?

Řešení

Jedná se o příklad téměř totožný s posledním z minulého týdne. Výsledkem je koeficient u x^{100} ve výrazu

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{20}} \cdot \frac{1}{1-x^{50}}$$

V tomto případě výsledek nezjednodušíme, nicméně systémy počítačové algebry, např. sage volně dostupný na `cocalc.com`, jsou schopny tento koeficient snadno spočítat:

Řešení

```
var('x')
f = 1/(1-x)*1/(1-x^2)*1/(1-x^5)*1/(1-x^10)*1/(1-x^20)*1/(1-x^50)
r = taylor(f, x, 0, 100)
r.coefficients(sparse = false)[100]
```

dá výsledek 4562.

Příklad

Určete kolika způsoby je možné naplnit tašku n kusy uvedených druhů ovoce, přičemž jednotlivé kusy téhož druhu nerozlišujeme, nemusí být využity všechny druhy a navíc:

- jablek může být libovolný počet,
- banánů musí být sudý počet,
- hrušek musí být násobek 4,
- pomeranče mohou být nejvýše 3 a
- pomelo může být pouze jedno (nebo žádné).

Příklad

Určete kolika způsoby je možné naplnit tašku n kusy uvedených druhů ovoce, přičemž jednotlivé kusy téhož druhu nerozlišujeme, nemusí být využity všechny druhy a navíc:

- jablek může být libovolný počet,
- banánů musí být sudý počet,
- hrušek musí být násobek 4,
- pomeranče mohou být nejvýše 3 a
- pomelo může být pouze jedno (nebo žádné).

Řešení

Tady již příklad dopočítáme do konce v ruce. Jedná se o koeficient u x^n ve výrazu

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots)$$
$$\cdot (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x)$$

Řešení

Tady již příklad dopočítáme do konce v ruce. Jedná se o koeficient u x^n ve výrazu

$$
\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) \\
&\cdot (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x) \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} \\
&= \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n
\end{aligned}
$$

Hledaný počet tedy je $\binom{n+2}{2}$.

Příklad

Rozviňte do mocninných řad racionální funkce

$$\frac{x}{x+2}, \quad \frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1}.$$

Příklad

Rozviňte do mocninných řad racionální funkce

$$\frac{x}{x+2}, \quad \frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1}.$$

Řešení

Základem je rozklad na parciální zlomky, v prvním případě je to triviální:

$$\frac{x}{2+x} = 1 + \frac{-2}{2+x} = 1 + \frac{-1}{1-(-x/2)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-x/2)^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1/2)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}([n=0] - (-1/2)^n) \cdot x^n$$

kde $[n=0]$ značí hodnotu tohoto logického výrazu, tj.: pro $n=0$ je hodnota 1, jinak je hodnota 0.

Příklad

Rozviňte do mocninných řad racionální funkce

$$\frac{x}{x+2}, \quad \frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1}.$$

Příklad

Rozviňte do mocninných řad racionální funkce

$$\frac{x}{x+2}, \quad \frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1}.$$

Řešení

Podobně pro druhý zlomek:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1} &= \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(2x+1)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(2x+1) + B(2x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}\end{aligned}$$

Řešení

Podobně pro druhý zlomek:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1} &= \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(2x+1)} \\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{2x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(2x+1)+B(2x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}\end{aligned}$$

dostáváme tedy pro neznámé koeficienty rovnici

$$A(x-1)(2x+1)+B(2x+1)+C(x-1)^2 = x^2+x+1,$$

Řešení

dostáváme tedy pro neznámé koeficienty rovnici

$$A(x-1)(2x+1)+B(2x+1)+C(x-1)^2=x^2+x+1,$$

kterou buď řešíme roznásobením a porovnáním koeficientů nebo vhodným dosazováním: vždy se hodí dosadit kořeny jmenovatele, tj. 1 a $-1/2$, jako třetí hodnotu dosadíme libovolné číslo:

$$\begin{aligned} x=1\colon\ B\cdot 3=3 \quad &\Rightarrow \quad B=1 \\ x=-1/2\colon\ C\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4} \quad &\Rightarrow \quad C=\frac{1}{3} \\ x=0\colon\ A\cdot(-1)+B+C=1 \quad &\Rightarrow \quad A=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(také by šlo rovnici zderivovat a dosadit $x=1$, což by dalo $A\cdot 3+B\cdot 2=3$). Vypočtené konstanty dosadíme do rozkladu:

Řešení

Vypočtené konstanty dosadíme do rozkladu:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1} &= \frac{1/3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1/3}{2x+1} \\
&= \frac{-1/3}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1/3}{1-(-2x)} \\
&= -1/3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n + 1/3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1/3 + (n+1) + 1/3 \cdot (-2)^n\right) \cdot x^n.
\end{aligned}
$$

Příklad

Určete vytvořující funkce posloupností

- $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$,
- $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$,
- $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,
- $(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \ldots)$,
- $(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \ldots)$.

Příklad

Určete vytvořující funkce posloupností

- $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$,
- $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$,
- $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,
- $(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \ldots)$,
- $(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \ldots)$.

Řešení

V prvním případě hledáme součet

$$\sum (n+1) \cdot x^n = \sum \binom{n+1}{1} \cdot x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Příklad

Určete vytvořující funkce posloupností

- $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$,
- $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$,
- $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$,
- $(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \dots)$,
- $(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \dots)$.

Řešení

V druhém případě hledáme součet $\sum (n+1)^2 \cdot x^n$, přičemž:

Řešení

V druhém případě hledáme součet $\sum (n+1)^2 \cdot x^n$, přičemž se pokusíme vyjádřit (podobně jako v rozkldu na parciální zlomky):

$$(n+1)^2 = A \cdot \binom{n+2}{2} + B \cdot \binom{n+1}{1} + C \cdot \binom{n+0}{0}.$$

Podle zobecněné binomické věty pak totiž můžeme $\sum (n+1)^2 \cdot x^n$ spočítat jako

$$A \cdot \sum \binom{n+2}{2} \cdot x^n + B \cdot \sum \binom{n+1}{1} \cdot x^n + C \cdot \sum \binom{n+0}{0} \cdot x^n$$
$$= A \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + B \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + C \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Zbývá najít neznáme koeficienty A, B, C, rozepišme proto kombinační čísla:

Řešení

$$(n+1)^2 = A \cdot \binom{n+2}{2} + B \cdot \binom{n+1}{1} + C \cdot \binom{n+0}{0}$$

$$\begin{aligned} n^2 + 2n + 1 &= A \cdot \frac{n^2 + 3n + 2}{2} + B \cdot (n+1) + C \\ &= 2 \cdot \frac{n^2 + 3n + 2}{2} - 1 \cdot (n+1) + 0 \end{aligned}$$

Hledané koeficienty jsou tedy $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$ a nakonec

$$\sum (n+1)^2 \cdot x^n = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Příklad

Určete vytvořující funkce posloupností

- $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$,
- $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$,
- $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,
- $(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \ldots)$,
- $(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \ldots)$.

Řešení

Ve třetím případě rozdělme posloupnost na součet dvou posloupností: $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \ldots) + (0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \ldots)$. Pro každou dostaneme snadno formulku, hledáme proto součet $\sum 2^n \cdot x^{2n} + \sum 2^n \cdot x^{2n+1}$.

Řešení

Ve třetím případě hledáme součet $\sum 2^n \cdot x^{2n} + \sum 2^n \cdot x^{2n+1}$. Úpravou získáme

$$\begin{aligned}\sum 2^n \cdot x^{2n} + \sum 2^n \cdot x^{2n+1} &= \sum (2x^2)^n + x \cdot \sum (2x^2)^n \\ &= \frac{1}{1-2x^2} + x \cdot \frac{1}{1-2x^2} \\ &= \frac{1+x}{1-2x^2}.\end{aligned}$$

Zkuste tuto řadu sečíst pomocí rozkladu na parciální zlomky a porovnejte výsledek se zadáním.

Příklad

Určete vytvořující funkce posloupností

- $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$,
- $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$,
- $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$,
- $(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \dots)$,
- $(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \dots)$.

Řešení

Ve čtvrtém případě hledáme součet $\sum 2^n \cdot (n+3)^2 \cdot x^{3n}$.

Řešení

Ve čtvrtém případě hledáme součet $\sum 2^n \cdot (n+3)^2 \cdot x^{3n}$.

$$\sum 2^n \cdot (n+3)^2 \cdot x^{3n} = \sum (n+3)^2 \cdot (2x^3)^n.$$

Opět vyjádříme $(n+3)^2$ pomocí kombinačních čísel

$$
\begin{aligned}
(n+3)^2 &= A \cdot \binom{n+2}{2} + B \cdot \binom{n+1}{1} + C \cdot \binom{n+0}{0} \\
n^2 + 6n + 9 &= A \cdot \frac{n^2 + 3n + 2}{2} + B \cdot (n+1) + C \\
&= 2 \cdot \frac{n^2 + 3n + 2}{2} + 3 \cdot (n+1) + 4
\end{aligned}
$$

Hledané koeficienty jsou tedy $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$ a nakonec

$$\sum (n+3)^2 \cdot (2x^3)^n = 2 \cdot \frac{1}{(1-2x^3)^3} + 3 \cdot \frac{1}{(1-2x^3)^2} + 4 \cdot \frac{1}{1-2x^3}.$$

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Jedná se o koeficient u x^{70} v

$$
\begin{aligned}
&(1+x+\cdots+x^{30})(1+x+\cdots+x^{40})(1+x+\cdots+x^{50})\\
&=\frac{1-x^{31}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{41}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{51}}{1-x}\\
&=\frac{(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})}{(1-x)^3}\\
&=\frac{1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+x^{72}+\cdots}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

Řešení

Podle zobecněné binomické věty pak

$$\frac{1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + \cdots}{(1-x)^3}$$
$$= (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + \cdots) \cdot \sum \binom{n+2}{2} \cdot x^n$$

Koeficient u x^{70} dostaneme vynásobením prvních čtyř členů v závorce odpovídajícími členy v druhé sumě – tak, aby exponent vyšel 70:

$$1 \cdot \binom{72}{2} - 1 \cdot \binom{41}{2} - 1 \cdot \binom{31}{2} - 1 \cdot \binom{21}{2}.$$

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne součet 30?

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne součet 30?

Řešení

Počet všech možných hodů je samozřejmě 6^{12}, počet příznivých hodů je roven koeficientu u x^{30} v

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12}$$
$$= \left(\frac{x - x^7}{1 - x}\right)^{12} = x^{12}(1 - x^6)^{12} \cdot \frac{1}{(1 - x)^{12}}$$

a tedy koeficientu u x^{18} v $(1 - x^6)^{12} \cdot \frac{1}{(1-x)^{12}}$, tj.

$$\left(\binom{12}{0} - \binom{12}{1}x^6 + \binom{12}{2}x^{12} - \binom{12}{3}x^{18} + \cdots\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+11}{11} \cdot x^n.$$

Řešení

a tedy koeficientu u x^{18} v $(1-x^6)^{12} \cdot \frac{1}{(1-x)^{12}}$, tj.

$$\left(\binom{12}{0} - \binom{12}{1}x^6 + \binom{12}{2}x^{12} - \binom{12}{3}x^{18} + \cdots\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+11}{11} \cdot x^n.$$

Výsledná pravděpodobnost je tak rovna

$$\frac{\binom{12}{0}\binom{29}{11} - \binom{12}{1}\binom{23}{11} + \binom{12}{2}\binom{17}{11} - \binom{12}{3}\binom{11}{11}}{6^{12}} = 0,8815\%.$$

K výsledku lze dojít také principem inkluze a exkluze a příkladu z minule.