Diskrétní matematika – 9. týden
Základy kombinatoriky

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!
Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

Analýza algoritmů: Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu `Quicksort`.

Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!

Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

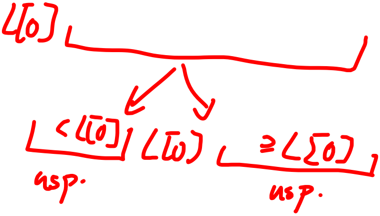
Analýza algoritmů: Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu `Quicksort`.

Odvození Cayleyho formule: Chceme znát počet různých stromů na daných n vrcholech.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
       + L[0:1]
       + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```



Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

délka $k-1$

délka $n-k$

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k-1$ a $n-k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k-1$ a $n-k$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$\frac{1}{n}(C_0+C_{n-1})+\frac{1}{n}(C_1+C_{n-2})+\dots$

$$C_n = n-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(C_{k-1}+C_{n-k}\right).$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \ C_0 = 0.$$

$$\frac{1}{n}(C_0 + C_{n-1}) + \frac{1}{n}(C_1 + C_{n-2}) + \cdots + \frac{1}{n}(C_{n-1} + C_0)$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$

symetrie obou sum

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \qquad \textit{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n-1) + 2 \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \qquad \textit{vynásob } n$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(C_{k-1} + C_{n-k}\right), \ C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *symetrie obou sum*

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *vynásob n*

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}$$ *tentýž výraz pro C_{n-1}*

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2(n-1) + 2C_{n-1}$$

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(C_{k-1} + C_{n-k}\right), \; C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \qquad \textit{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \qquad \textit{vynásob } n$$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} \qquad \textit{tentýž výraz pro } C_{n-1}$$

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1) \qquad \textit{odečteno a upraveno}$$

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n.

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n.

Nejprve si pomůžeme drobným trikem, kdy vydělíme obě strany výrazem $n(n+1)$:

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \left(\frac{C_{n-2}}{n-1} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n}\right) + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

$= \dots$

Nyní tento vztah „rozbalíme“ (*telescope*, příp. si pomůžeme substitucí $B_n = C_n/n+1$):

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} + \dots + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{C_1}{2}$$

$C_1 = 0$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \vdots \quad \frac{2}{n+1}$$

$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{4} \quad \vdots \quad -\frac{1}{n}$$

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - 1 - 1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2\left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{x=1}^{n+1}$$

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1}\right),$$

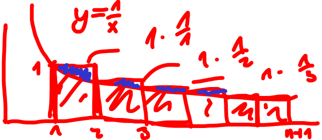
$$= \ln(n+1)$$

odkud

$$\approx n \cdot H_n \approx n \cdot \ln n$$

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady).



H_n = obsah obdélníků

$$\approx \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx + \gamma_{konst.}$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1}\right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady). Přitom je možné odhadnout $H_n \sim \int_1^n \frac{dx}{x} + \gamma$, odkud

$$C_n \sim 2(n+1)(\ln(n+1) + \gamma - 2) + 2.$$

Plán přednášky

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|$$

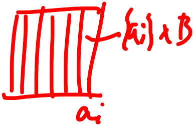
disj. sjedn. = sjedn. za předp. $A \cap B = \emptyset$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \qquad A = \{a_1, \dots, a_k\}$$

$$|\{a_1\} \times B \sqcup \{a_2\} \times B \sqcup \dots \sqcup \{a_k\} \times B|$$

$$= |\{a_1\} \times B| + \dots + |\{a_k\} \times B|$$

$$= |B| + \dots + |B| = k \cdot |B|$$



$$\left|\bigsqcup_{i=1}^{k} B_i\right| = k \cdot |B_i|$$

pokud mají B_i stejně prvků

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.
Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.

$s_1, \ldots$ ← počet = počet pořadí $\{s_2, \ldots, s_n\}$

$= (n-1)!$

$s_2, \ldots$ ←

$\vdots$

$s_n, \ldots$ ← — // —

$n \cdot (n-1)! = n!$

důkaz indukcí dokončen

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.
Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.
Počet **kombinací** k**-tého stupně** z n prvků je ($k \leq n$)

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.

Počet **kombinací** k-**tého stupně** z n prvků je ($k \leq n$)

počet k-prvkových podmn. n-prvkové množiny

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet variací platí

k prvků navíc uspořádané

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

$$v(n,k) = c(n,k) \cdot k!$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \qquad \frac{v(n,k)}{k!} = c(n,k)$$

Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním, $P(p_1, \ldots, p_k)$, platí

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

$k \quad n-k$

spec. případ : dva druhy $1, 0$

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$

$S \qquad s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6 \ s_7 \ s_8 \ s_9$

$\{ s_1 \ s_3 \ s_4 \ s_7 \}$ — k-prvková podm.

Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním, $P(p_1, \ldots, p_k)$, platí

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Pro **variace k-tého stupně s opakováním** z n prvků platí

$$V(n, k) = n^k.$$

$n \cdot n \ldots$

Pro **kombinace s opakováním**, $C(n,k)$, platí

Věta

Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechna $0 \le k$ a $0 < n$

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

$$\binom{(n-1)+k}{k} = \binom{(n-1)+k}{n-1}$$

Σ = počet jedniček

$$\overbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1}^{n}$$

$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6 \quad s_7$

$2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3$

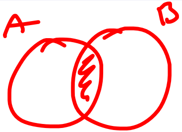
11 | 1 | | 1 | | | 111

$\Sigma = 7$

$k = \Sigma$ = počet jedniček

$n-1$ = počet |

Princip inkluze a exkluse



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Uvažujme obecnou konečnou množinu M a její podmnožiny $A_1, \dots, A_k$. Budeme psát $|M|$ pro počet prvků množiny M, tj. pro **mohutnost** množiny M.

$x \in M$ x leží právě v r podm. z A_i

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^{k}\left((-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_j \le k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j})|\right).$$

$1 + (-1)r + \binom{r}{2} + (-1)\binom{r}{3} + \dots$

$= \underline{\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \dots}$

$\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 & r \ge 1 \\ 1 & r = 0 \end{matrix}\right.$

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

$$|M \setminus A| = |M| - |A|$$

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

Výsledek je $\underbrace{\binom{15}{4}}_{\text{všechny komise}} - \underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{komise s oběma poslanci}} = 1287$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$1+\dots+n = n \cdot \frac{1+n}{2}$

$0+\dots+n$

$= (n+1)\frac{0+n}{2}$

aritm

$a + \dots + b = n \cdot \frac{a+b}{2}$

o a prvcích

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$(x+y) \cdots (x+y)$

$x^k y^{n-k}$ dostaneme $\binom{n}{k}$x

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

$1 \quad 2 \quad \cdots \quad n \quad n+1$

rozdělíme podle nejv. prvku podmn. – $n+1$: zbylých m vybíráme z $1, \ldots, n$

n: $1, \ldots, n-1$

$\vdots$

$m+1$: $1, \ldots, m$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{m}{m}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

mužů žen

Vandermondova konvoluce $$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

Odkazovací strategie

Ve vězení je 100 vězňů s čísly jedna až sto. V uzavřené místnosti je 100 krabiček s čísly jedna až sto a v každé z nich náhodně rozdělené papírky s čísly také 1 až sto. Do místnosti budou po jednom postupně vcházet vězni a každý smí otevřít 50 krabic, vězni přitom spolu nekomunikují. Jestliže každý z nich najde svoje číslo, všechny pustí, v opačném případě všechny popraví.
Doporučte nějakou rozumnou strategii pro vězně ...

$\boxed{\sigma(1)}$ — — — $\boxed{\sigma(100)}$

1   100

σ permutace mn. $\{1, \dots, 100\}$

$\longrightarrow$ vězni se zachrání $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ permutace σ neobsahuje cyklus délky > 50

$$\frac{\text{počet perm. bez cyklu délky} > 50}{100!}$$

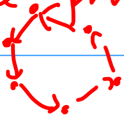
$$= \frac{100! - \text{počet perm. s cyklem délky} > 50}{100!}$$

nutně jediný, délky k

počet cyklů

počet: $\binom{100}{k} \cdot \frac{k!}{k} \cdot (100-k)!$

vybereme prvky tvořící cyklus



$$1 - \frac{1}{100!} \sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k} \frac{k!}{k} \cdot (100-k)!$$

$$= 1 - \frac{1}{\cancel{100!}} \sum_{k=51}^{100} \frac{\cancel{100!}}{\cancel{k!} \cdot \cancel{(100-k)!}} \frac{\cancel{k!}}{k} \cancel{(100-k)!}$$

$$= 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 1 - \int_{k=50}^{100} \frac{1}{x}\, dx = 1 - \underbrace{(\ln 100 - \ln 50)}_{\ln \frac{100}{50} = \ln 2}$$

$$= 1 - \ln 2 \approx 0{,}3$$

docela přesně

30%

Plán přednášky

Zobecněná binomická věta

$\alpha \in \mathbb{R}$

Pro reálná čísla y, z, $y + z > 0$, platí

$$y^\alpha\left(1+\frac{z}{y}\right)^\alpha = (y+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^{\alpha-k} z^k,$$

$$= y^\alpha \sum \binom{\alpha}{k} y^{-k} z^k = y^\alpha \sum \binom{\alpha}{k} \left(\frac{z}{y}\right)^k$$

kde i pro $\alpha \notin \mathbb{N}$ klademe

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

$$= \frac{\alpha}{k}\,\frac{(\alpha-1)}{(k-1)} \cdots \frac{(\alpha-k+1)}{1}$$

$$\frac{z}{y} \to x$$

Budeme dokazovat v ekvivalentním tvaru (předpokládáme $y > 0$ a tedy můžeme z celého výrazu vytknout y^α, označíme $x = z/y$)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k. \qquad \alpha \in \mathbb{N} \quad = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$\binom{\alpha}{k} = 0$ pro $k > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$

Jde nám tedy o vyjádření koeficientů v mocninné řadě pro mocninnou funkcí $f(x) = (1+x)^\alpha$ se středem v $x = 0$. Jednoduchou kombinatorickou úvahou využívající pravidlo pro derivování mocninných řad člen po členu odvodíme požadovaný výsledek.

Taylorův rozvoj: $f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}$

$f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$

Budeme dokazovat v ekvivalentním tvaru (předpokládáme $y > 0$ a tedy můžeme z celého výrazu vytknout y^α, označíme $x = z/y$)

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jde nám tedy o vyjádření koeficientů v mocninné řadě pro mocninnou funkcí $f(x) = (1 + x)^\alpha$ se středem v $x = 0$.
Jednoduchou kombinatorickou úvahou využívající pravidlo pro derivování mocninných řad člen po členu odvodíme požadovaný výsledek.
Všimněme si, že pro přirozené α se od jistého k v čitateli zobecněného binomického koeficientu vždy objeví jako součinitel nula, proto v takovém případě dostáváme opět klasickou konečnou sumu z binomické věty.