Dekompozice problému, AND/OR grafy, problémy s omezujícími podmínkami

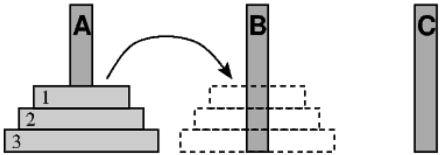
Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

Příklad – Hanojské věže

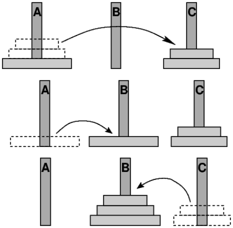
- máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$) bez porušení uspořádání



`bit.ly/uuihanoi` (Tower3 je zde cíl)

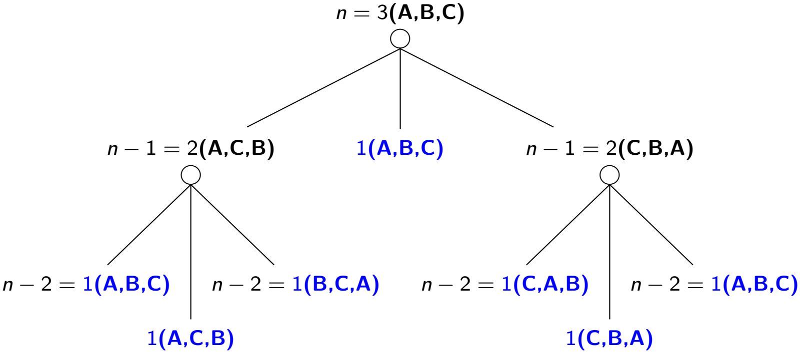
Můžeme rozložit na fáze:

1. přeskládat $n-1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.
2. přeložit 1 kotouč z **A** na **B**
3. přeskládat $n-1$ kotoučů z **C** pomocí **A** na **B**



Příklad – Hanojské věže – pokrač.

schéma celého řešení pro $n = 3$:



Příklad – Hanojské věže – pokrač.

```
function HanoiTower(n, source, dest, spare)
    if n = 1 then
        return (source, dest)    # pro 1 disk – přesuň ho ze source na dest
    else
        output = HanoiTower(n - 1, source, spare, dest)  # přesuň n − 1 disků na spare
        output.append((source, dest))    # přesuň zbývající největší disk na dest
        # přesuň odložených n − 1 disků na dest
        output.append(HanoiTower(n - 1, spare, dest, source))
        return output
```

HanoiTower(3,'a','b','c'):

[('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'c'), ('a', 'b'), ('c', 'a'), ('c', 'b'), ('a', 'b')]

optimalizace – ukládat výsledky prvního rekurzivního volání a uložený výsledek vždy převzít bez nadbytečné další rekurze

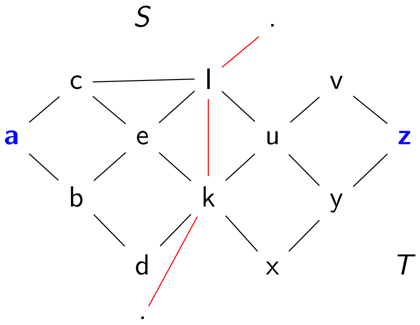
Cesta mezi městy pomocí dekompozice

města:

a, . . . , **e**	. . .	ve státě S
l a **k**	. . .	hraniční přechody
u, . . . , **z**	. . .	ve státě T

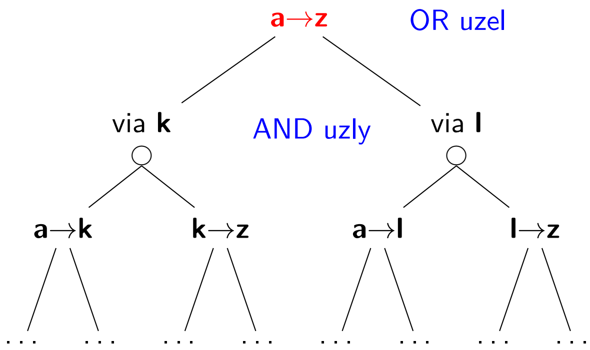
hledáme cestu z **a** do **z**:

- cesta z **a** do hraničního přechodu
- cesta z hraničního přechodu do **z**



Cesta mezi městy pomocí dekompozice – pokrač.

schéma řešení pomocí rozkladu na podproblémy = AND/OR graf

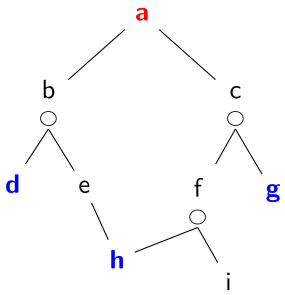


Celkové řešení = podgraf AND/OR grafu, který nevynechává žádného následníka AND-uzlu.

AND/OR graf a strom řešení

AND/OR graf = graf s 2 typy vnitřních uzlů – AND uzly a OR uzly

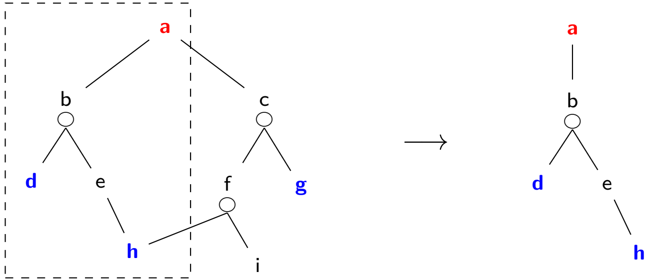
- *AND uzel* jako součást řešení vyžaduje průchod všech svých poduzlů
- *OR uzel* se chová jako bežný uzel klasického grafu



AND/OR graf a strom řešení

strom řešení T problému P s AND/OR grafem G:

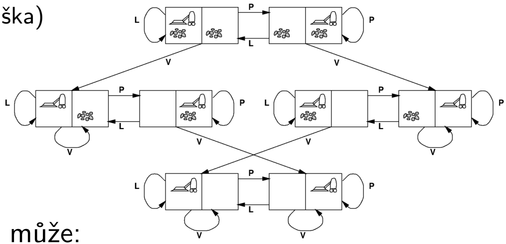
- problém P je kořen stromu T
- jestliže P je OR uzel grafu G ⇒ právě jeden z jeho následníků se svým stromem řešení je v T
- jestliže P je AND uzel grafu G ⇒ všichni jeho následníci se svými stromy řešení jsou v T
- každý list stromu řešení T je cílovým uzlem v G



Příklad – agent vysavač v nestálém prostředí

problém agenta Vysavače (2. přednáška)

v nestálém prostředí:

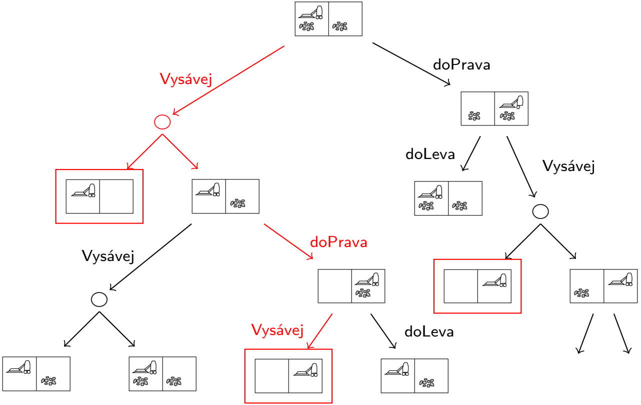


- dvě místnosti, jeden vysavač
- v každé místnosti je/není špína
- počet stavů je $2 \times 2^2 = 8$
- akce $=\{doLeva, doPrava, Vysávej\}$
- nedeterminismus – akce *Vysávej* může:
  - ve špinavé místnosti – vysát místnost a někdy i tu vedlejší
  - v čisté místnosti – někdy místnost zašpinit

Strategie/kontingenční plán (prohledávací strom) obsahuje 2 typy uzlů:

- deterministické stavy, kde se prostředí nemůže měnit – agent jen volí další postup, OR
- nedeterministické stavy, kde se prostředí náhodně může změnit – agent musí řešit více možností, AND
- mohou nastat cykly, řešení je jen když nedeterminismus není vždy negativní

Příklad – agent vysavač v nestálém prostředí pokrač.

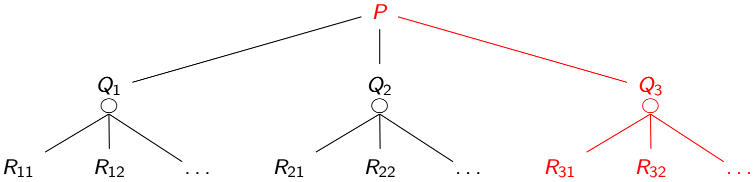


Příklad – výherní strategie

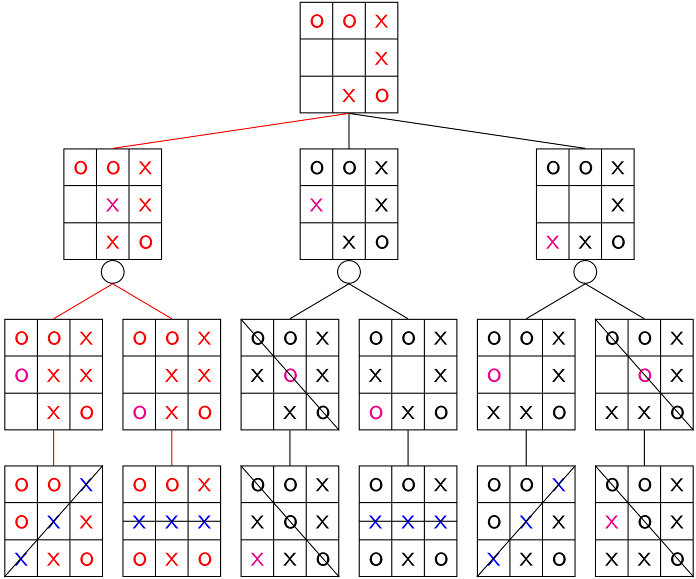
Hra 2 hráčů s perfektními znalostmi, 2 výstupy $\begin{cases} \text{výhra} \\ \text{prohra} \end{cases}$

Výherní strategii je možné formulovat jako AND/OR graf:

- počáteční stav P typu *já-jsem-na-tahu*
- moje tahy vedou do stavů $Q_1, Q_2, \ldots$ typu *soupeř-je-na-tahu*
- následně soupeřovy tahy vedou do stavů $R_{11}, R_{12}, \ldots$ *já-jsem-na-tahu*
- cíl – stav, který je výhra podle pravidel (*prohra* je neřešitelný problém)
- stav P *já-jsem-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ některý z Q_i je výherní, OR
- stav Q_i *soupeř-je-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ všechny R_{ij} jsou výherní, AND
- výherní strategie = řešení AND/OR grafu

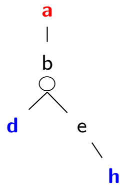


Příklad – výherní strategie



Prohledávání AND/OR grafu do hloubky

```
function ANDORDEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← []) # vrací řešení nebo "failure"
    if length(path) = 0 then
        return AndOrDepthFirstSearch(problem, [problem.init_state ])
    current_node ← path.last()   # poslední prvek cesty
    if problem.is_goal (current_node) then
        return [] # prázdné (elementární) řešení
    else if problem.is_or_state (current_node) then          OR-uzel
        foreach child in problem.moves(current_node) do
            if child ∈ path then next
            result = AndOrDepthFirstSearch(problem, path + [child])
            if result ≠ "failure" then return [child] + result
        return "failure"
    else if problem.is_and_state (current_node) then         AND-uzel
        results = []
        foreach child in problem.moves(current_node) do
            if child ∈ path then return "failure"
            result = AndOrDepthFirstSearch(problem, path + [child])
            if result = "failure" then return "failure"
            results .append(result)
        return [ child ] + [ results ]
```



AndOrDepthFirstSearch(*problem*):
    `['a','b',[['d'],['e','h']]]`

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*)

- algoritmus AO* má stejné charakteristiky a složitost jako A*
- cena přechodové hrany = míra složitosti podproblému:
  uzel = $\substack{\text{and}\\\text{or}}$, [(NaslUzel1,Cena1), (NaslUzel2,Cena2), … , (NaslUzelN,CenaN)]
- definujeme cenu uzlu jako cenu optimálního řešení jeho podstromu
- pro každý uzel N máme daný odhad jeho ceny:

  $$h(N) = \text{heuristický odhad ceny optimálního podgrafu s kořenem } N$$

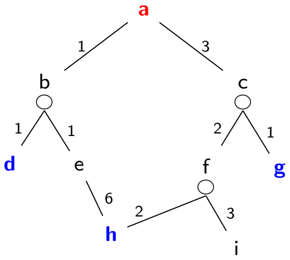
- pro každý uzel N, jeho následníky $N_1, \ldots, N_b$ a jeho předchůdce M definujeme:

$$F(N) = \mathrm{cena}(M, N) + \begin{cases} h(N), & \text{pro ještě neexpandovaný uzel } N \\ 0, & \text{pro cílový uzel (elementární problém)} \\ \min_i(F(N_i)), & \text{pro OR-uzel } N \\ \sum_i F(N_i), & \text{pro AND-uzel } N \end{cases}$$

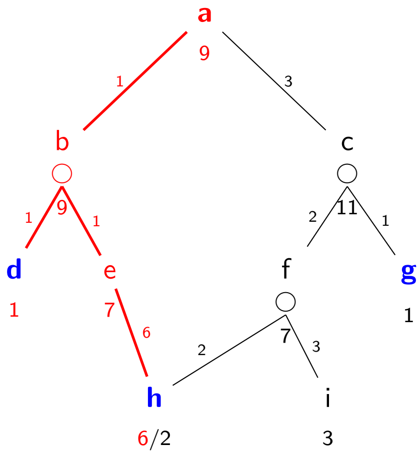
Pro optimální strom řešení S je tedy $F(S)$ právě cena tohoto řešení

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení =
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \ldots$

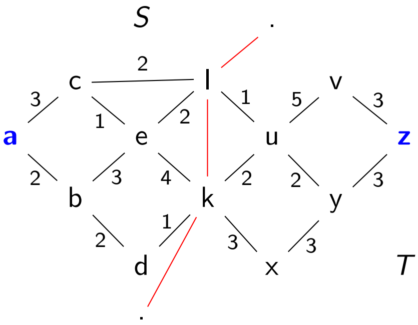


předp. $\forall N : h(N) = 0$



Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

- cesta mezi sousedícími městy **Mesto1** a **Mesto2** – ohodnocené hrany **problem.moves(Mesto1)** $\rightarrow$ **[(Mesto2,Vzdal2), ...]**
- klíčové postavení města **Mesto3** na cestě z **Mesto1** do **Mesto2** – funkce **problem.key(Mesto1, Mesto2)** $\rightarrow$ **[Mesto3, ...]**.



Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

vlastní hledání cesty:

1. $\exists$ **Y1**, **Y2**,… klíčové body mezi městy **A** a **Z**. Hledej jednu z cest:
   - cestu z **A** do **Z** přes **Y1**
   - cestu z **A** do **Z** přes **Y2**
   - …
2. Není-li mezi městy **A** a **Z** klíčové město $\Rightarrow$ hledej souseda **Y** města **A** takového, že existuje cesta z **Y** do **Z**.

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

Konstrukce příslušného AND/OR grafu:

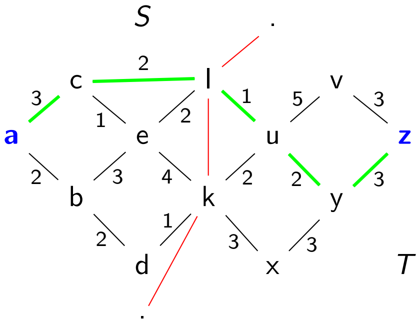
"pravidlová" definice grafu:

```
# kterákoliv cesta přes klíčové město 'a-z' → ('or', [('a-z via k', 0), ('a-z via l', 0)]) ...
for X ∈ problem.cities do for Z ∈ problem.cities do
    nodes = []; for Y ∈ problem.key(X, Z) do nodes.append(('X-Z via Y', 0))
    if length(nodes)>0 then problem.add('X-Z' → ('or', nodes))

# kterákoliv cesta přes sousední města 'a-l' → ('or', [('c-l', 3), ('b-l', 2)]) ...
for X ∈ problem.cities do for Z ∈ problem.cities do
    nodes = []; for Y, V ∈ problem.moves(X) do nodes.append(('Y-Z', V))
    if length(nodes)>0 then problem.add('X-Z' → ('or', nodes))

# cesta do a z klíčového města 'a-z via l' → ('and', [('a-l', 0), ('l-z', 0)]) ...
for X ∈ problem.cities do for Z ∈ problem.cities do
    for Y ∈ problem.key(X, Z) do
        problem.add('X-Z via Y' → ('and', [('X-Y',0), ('Y-Z',0)]))

# cíle – elementární problémy goal('a-a'); goal('b-b'); ...
for X ∈ problem.cities do
    problem.add(goal('X-X'))
```

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

heuristika $h(\ X - Z \quad | \quad X - Z \ via \ Y\ ) = vzdušná\ vzdálenost$

Když $\forall n : h(n) \leq h^*(n)$, kde h^* je minimální cena řešení uzlu $n \Rightarrow$ najdeme vždy optimální řešení



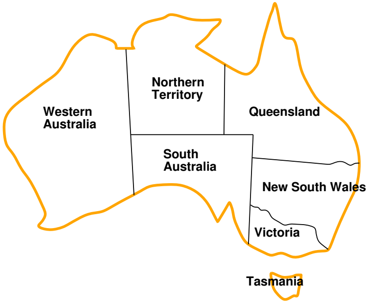
AO∗Search('a-z'):
[('a-z',11),
('a-z via l',11),
[[('l-z',6),
('u-z',6),
('y-z',5),
('z-z',3)],
[('a-l',5),
('c-l',5),
('l-l',2)]]]

AND-uzel

Problémy s omezujícími podmínkami

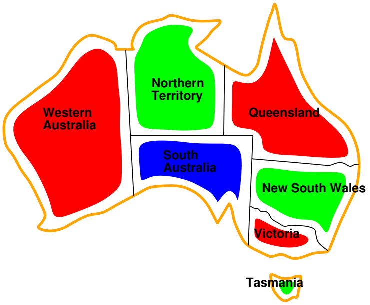
- standardní problém řešený prohledáváním stavového prostoru $\rightarrow$ stav je "*černá skříňka*" – pouze cílová podmínka a přechodová funkce
- problém s omezujícími podmínkami, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - n-tice proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z domén $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina omezení $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i
  - stav = přiřazení hodnot proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$
    - konzistentní přiřazení neporušuje žádné z omezení C_i
    - úplné přiřazení zmiňuje každou proměnnou X_i
  - řešení = úplné konzistentní přiřazení hodnot proměnným
    někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*
- výhody:
  - jednoduchý formální jazyk pro specifikaci problému
  - může využívat obecné heuristiky (ne jen specifické pro daný problém)

Příklad – obarvení mapy



- Proměnné WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- Domény $D_i = \{\text{červená}, \text{zelená}, \text{modrá}\}$
- Omezení – sousedící oblasti musí mít různou barvu
  tj. pro každé dvě sousedící: $WA \neq NT$ nebo
  $(WA, NT) \in \{(\text{červená}, \text{zelená}), (\text{červená}, \text{modrá}), (\text{zelená}, \text{modrá}), \dots\}$

Příklad – obarvení mapy – pokrač.



- Řešení – konzistentní přiřazení všem proměnným:
  $\{WA = \text{červená}, NT = \text{zelená}, Q = \text{červená}, NSW = \text{zelená}, V = \text{červená}, SA = \text{modrá}, T = \text{zelená}\}$

Varianty CSP podle hodnot proměnných

- diskrétní hodnoty proměnných – spočetně mnoho jednotlivých hodnot
  - konečné domény
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - nekonečné domény – čísla, řetězce, ...
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje jazyk omezení, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají
- spojité hodnoty proměnných
  - časté u reálných problémů
  - např. počáteční/koncový čas měření na Hubbleově teleskopu (závisí na astronomických, precedenčních a technických omezeních)
  - *lineární omezení* řešené pomocí Lineárního programování (omezení = lineární (ne)rovnice tvořící konvexní oblast) → jsou řešitelné v polynomiálním čase

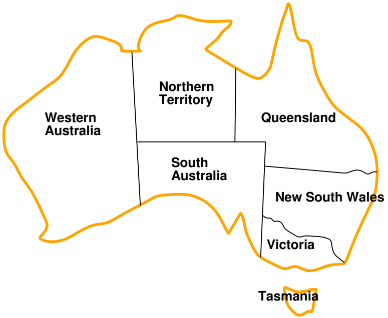
Varianty omezení

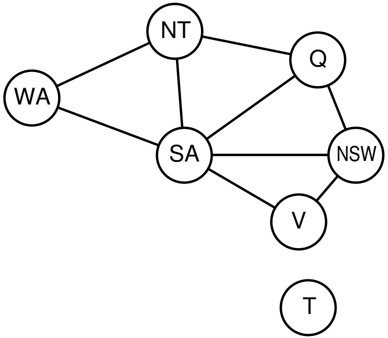
- unární omezení zahrnuje jedinou proměnnou
  např. $SA \neq$ zelená
- binární omezení zahrnují dvě proměnné
  např. $SA \neq WA$
- omezení vyššího řádu zahrnují 3 a více proměnných
  např. kryptoaritmetické omezení na sloupce u algebrogramu
- preferenční omezení (soft constraints), např. 'červená je lepší než zelená'
  možno reprezentovat pomocí ceny přiřazení u konkrétní hodnoty a konkrétní proměnné $\rightarrow$ hledá se optimalizované řešení vzhledem k ceně

Graf omezení

Pro binární omezení: uzly = proměnné, hrany = reprezentují jednotlivá omezení

Pro *n*-ární omezení: hypergraf: ○ uzly = proměnné, □ uzly = omezení, hrany = použití proměnné v omezení





Algoritmy pro řešení CSP využívají této grafové reprezentace omezení

CLP – Constraint Logic Programming

?X in +Min..+Max

?X in +Domain . . .

A in 1..3 \/8..15 \/5..9 \/100.

+VarList ins +Domain

fd_dom(?Var,?Domain) zjištění domény proměnné

X **in** 1..5 , Y **in** 2..8 , $X+Y$ **#=** T:

X **in** 1..5

Y **in** 2..8

T **in** 3..13

aritmetická omezení . . .

- rel. operátory #=, #\=, #<, #=<, #>, #>=
- **sum(Variables,RelOp,Suma)**

výroková omezení . . .

#\ negace, #/\ konjunkce, #\/ disjunkce, #<==> ekvivalence

kombinatorická omezení . . .

all_distinct(List), **global_cardinality(List, KeyCounts)**

X **in** 1..5 , Y **in** 2..8 , $X+Y$ **#=** T, **labeling**([X,Y,T]):

$T = 3$

$X = 1$

$Y = 2$

hledá hodnoty podle omezení

CLP – Constraint Logic Programming – pokrač.

```
X #< 4, [X,Y] ins 0..5:
    X in 0..3 , Y in 0..5.

X #< 4, indomain(X):
   ERROR: Arguments are not sufficiently  instantiated

X #> 3, X #< 6, indomain(X):
    X = 4
    X = 5

X in 4..sup, X #\= 17, fd_dom(X,F):
    F = 4..16\/18..sup,
    X in 4..16\/18..sup.
```

Příklad – algebrogram

```
    S E N D
+   M O R E
-----------
  M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $1000 * S + 100 * E + 10 * N + D + 1000 * M + 100 * O + 10 * R + E = 10000 * M + 1000 * O + 100 * N + 10 * E + Y$

function MoreMoney([S,E,N,D,M,O,R,Y])
    [S,E,N,D,M,O,R,Y] **ins** 0..9
    S #> 0; M #> 0
    all_distinct ([S,E,N,D,M,O,R,Y])
    1000*S + 100*E + 10*N + D + 1000*M + 100*O + 10*R + E
        #= 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
    labeling ([S,E,N,D,M,O,R,Y])

MoreMoney([S,E,N,D,M,O,R,Y]):
    $S = 9,\ E = 5,\ N = 6,\ D = 7,\ M = 1,\ O = 0,\ R = 8,\ Y = 2$

Inkrementální formulace CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- stav – přiřazení hodnot proměnným
- počáteční stav – prázdné přiřazení $\{\}$
- přechodová funkce – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- cílová podmínka – aktuální přiřazení je úplné
- cena cesty – konstantní (např. 1) pro každý krok

1. platí beze změny pro všechny CSP!
2. prohledávací strom dosahuje hloubky n (počet proměnných) a řešení se nachází v této hloubce ($d = n$) $\Rightarrow$ je vhodné použít prohledávání do hloubky

Prohledávání s navracením

- přiřazení proměnným jsou komutativní
  tj. [1. $WA =$ červená, 2. $NT =$ zelená] je totéž jako
  [1. $NT =$ zelená, 2. $WA =$ červená]
- stačí uvažovat pouze přiřazení jediné proměnné v každém kroku $\Rightarrow$ počet listů max. $|D_i|^n$, větvení jde ovlivnit obecnými strategiemi
- prohledávání do hloubky pro CSP – tzv. prohledávání s navracením (*backtracking search*)
- prohledávání s navracením je základní neinformovaná strategie pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- schopný vyřešit např. problém n-dam pro $n \approx 25$ (naivní řešení 10^{69}, vlastní sloupce 10^{25})

Příklad – problém N dam

```
function QUEENS(N)
    L = [q_y1, q_y2, ..., q_yN]  # seznam N proměnných
    L ins 1..N
    for i ← 1 to N-1 do
        for j ← i+1 to N do
            NoThreat(L[i], L[j], j-i)
    labeling(L)

function NOTHREAT(Y1, Y2, J)
    return Y1 #\= Y2 and Y1+J #\= Y2 and Y1-J #\= Y2
```

1. definice proměnných a domén

2. definice omezení

3. hledání řešení

Queens(4):

[2,4,1,3]

[3,1,4,2]

Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody ovlivnění efektivity:

– Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
– V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
– Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- nejomezenější proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- nejvíce omezující proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- nejméně omezující hodnota $\rightarrow$ pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných
- dopředná kontrola $\rightarrow$ udržovat seznam možných hodnot pro zbývající proměnné
- propagace omezení $\rightarrow$ navíc kontrolovat možné nekonzistence mezi zbývajícími proměnnými

Ovlivnění efektivity v CLP

V Prologu (CLP) možnosti ovlivnění efektivity – **labeling(Typ, ...)**:

```
?- constraints(Vars,Cost),
   labeling([ff,bisect,down,min(Cost)],Vars).
```

- výběr proměnné – **leftmost**, **min**, **max**, **ff**, ...
- dělení domény – **step**, **enum**, **bisect**
- prohledávání domény – **up**, **down**
- uspořádání řešení – bez uspořádání nebo **min(X)**, **max(X)**, ...

Systémy pro řešení omezujících podmínek

- Prolog – SWI, CHIP, ECLiPSe, SICStus Prolog, Prolog IV, GNU Prolog, IF/Prolog
- C/C++ – CHIP++, ILOG Solver, Gecode
- Java – JCK, JCL, Koalog
- LISP – Screamer
- Python – logilab-constraint `www.logilab.org/852`, python-constraint
- Mozart – `www.mozart-oz.org`, jazyk Oz