

Od modálních logik k TILu. Vícehodnotové logiky

Luboš Popelínský

E-mail: popel@fi.muni.cz
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

Obsah:

- Klasické a neklasické logiky
- Intenzionální logiky. Modální logika
- Temporální a jiné modality
- Transparentní intenzionální logika. Začínáme
- Vícehodnotová logika

Klasické a neklasické logiky

Už od Aristotela se logika řídí dvěma základními logickými principy¹

- principem extenzionality
- principem dvouhodnotovosti.

princip extenzionality : pracujeme vyhradně s pravdivostními hodnotami tvrzení a nikoliv s jejich obsahem. Tedy, logika pracuje pouze s oznamovacími větami a na těchto větách jí nezajímá, o čem tyto věty jsou, nýbrž vyhradně a pouze to, jaká je jejich pravdivostní hodnota, tj. zda se jedná o pravdivá či nepravdivá tvrzení. Přesněji to znamená, že logické spojky fungují jako funkce z množiny pravdivostních hodnot do množiny pravdivostních hodnot, tj., že pravdivostním hodnotám částí složeného výroku přiřadí výslednou pravdivostní hodnotu (celého složeného výroku).

¹Projekt ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

Úvodem k intenzionálním logikám. Módy pravdy

Cavaco Silva je prezidentem Portugalska.

Jana čte.

Sluneční soustava má devět planet. (Nebo osm?)

Třetí odmocnina z 27 jsou 3.

nutně pravda, i v budoucnu. Ale:

Jana **ví**, že třetí odmocnina z 27 jsou 3.

Jan **nevěří**, že třetí odmocnina z 27 jsou 3.

Verifikace programů: nejen různé světy, ale i různé budoucnosti

VŽDY pravda, **NĚKDY** pravda, **VÍM** že, **VĚŘÍM** že, ...

Modální logika

$\Box\phi$ - "nutně platí ϕ ", " ϕ je vždy pravda"

$\Diamond\phi$ - "možná platí ϕ ", " ϕ je někdy pravda"

K-logika $K \equiv$ Kripke, nejobecnější, tj. s minimálními omezeními pro \Box
resp. \Diamond

Je-li \mathcal{L} jazyk predikátové logiky, rozšíříme ho na **modální jazyk** $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$
přidáním dvou symbolů \Box and \Diamond do abecedy a **do definice syntaxe přidáme**

Je-li ϕ formule, pak také $(\Box\phi)$ a $(\Diamond\phi)$ jsou formule.

Sémantika: **Kripkeho rámce**, tj. Kripkeho interpretace

Sémantika modální logiky

Kripkeho interpretace (též rámeček) $C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$

W ... množina světů

S ... relace přístupu/dostupnosti (accessibility)

$C(p)$... logika, např. výroková, $C(p)$ pro \mathcal{L} v každém světě $p \in W$

$C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$ je **Kripkeho rámeček** pro jazyk \mathcal{L} (\mathcal{L} -frame) jestliže pro každé světy p a q z W , pSq implikuje, že $C(p) \subseteq C(q)$ a interpretace konstant v \mathcal{L} (p) \subseteq \mathcal{L} (q) je stejná v $C(p)$ i v $C(q)$.

Sémantika modální logiky

Nechť $C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$ je Kripkeho rámec pro jazyk \mathcal{L} , $p \in W$ a ϕ je formule jazyka \mathcal{L} (p). **Formule ϕ platí ve světě p** (angl. p forces ϕ), píšeme $p \Vdash \phi$, jestliže

1. pro atomickou formuli ϕ , $p \Vdash \phi \Leftrightarrow \phi$ je pravdivá v $C(p)$.
2. $p \Vdash (\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow p \Vdash \phi$ implikuje $p \Vdash \psi$. Podobně pro ostatní logické spojky a \forall, \exists
3. $p \Vdash \Box\phi \Leftrightarrow$ pro všechny světy $q \in W$ takové, že pSq ² $q \Vdash \phi$.
4. $p \Vdash \Diamond\phi \Leftrightarrow$ existuje $q \in W$ pSq a $q \Vdash \phi$.

Formule ϕ je **pravdivá v Kripkeho rámci (interpretaci) C** , jestliže pro každý svět $p \in W$ ϕ platí ve světě p , píšeme $\Vdash_C \phi$. Formule ϕ je **tautologie**, jestliže platí ve všech interpretacích Kripkeho.

²svět q je přístuoný ze světa p

Tautologie ... ?

axiom	jméno	vlastnost relace R
$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$	K	žádné požadavky
$\Box A \rightarrow \Diamond A$	D	$\exists u(wRu)$
$\Box A \rightarrow A$	M	wRw
$\Box A \rightarrow \Box \Box A$	4	$(wRv \wedge vRu) \Rightarrow wRu$
$A \rightarrow \Box \Diamond A$	B	$wRv \Rightarrow vRw$
$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	5	$(wRv \wedge wRu) \Rightarrow vRu$

viz David Pelikán, Vzájemná srovnání axiomatických systémů modálních logik, DP FFUK Praha 2007

Temporální a jiné modality

od modalit "nutně", "možná" celkem přirozeně k modalitám **temporálním** "někdy/vždycky v minulosti/budoucnosti viz např.

https://www.fi.muni.cz/~popel/lectures/bak_logika/non-classical-logics/modal-logic.pdf

Deontické modality

Op Je přikázáno p (z anglického ordered = přikázáno)

Fp Je zakázáno p (z anglického forbidden = zakázáno)

Pp Je povoleno p (z anglického permitted = povoleno)

dosavadní modality - alethické (nutnost, možnost), temporální i deontické : v jistém smyslu absolutní a všeobecně platné, **epistemické modality** jsou "relativní":

Kxp x ví, že platí p (z angl. know = vědět)

Uxp x neví, že platí p (z unknown = neznámé)

Bxp x věří, že platí p (z believe = věřit)

Nedostatečná expresivita predikátové logiky. Příklady

1. Červená barva je krásnější než modrá. Kostka je červená.
individuum(červená barva) vs. **vlastnost** (je červená)
nelze vyjádřit např. jejich rovnost
2. Varšava je hlavní město Polska.
Varšava - **jméno individua**
hlavní město Polska - **individuová role**
 - závisí na světě a čase
 - **význam** "býti hlavním městem" na světě a čase **nezávisí**
3. Číslo X je větší než číslo Y. vs. Otec je větší než syn.
 matematické "větší než", **relace**, pevně dané. vs.
 empirické : **vztah** dvou individuí, který se může měnot v čase
4. ano vs. V Brně prší.
 ano = **pravdivostní hodnota** true vs. **propozice** označuje pravdivostní hodnotu, která se mění v čase.
 I když pravdivostní hodnota někdy závisí **na světě a čase**, samotný **význam** na nich **nezávisí**

Problém substituce

Problém substituce : $a = b; C(x/a) \vdash C(x/b)$

Prezident ČR je manžel Livie.

Prezident ČR je ekonom.

⊢

Manžel Livie je ekonom.

Ale:

Prezident ČR je manžel Livie.

Miloš Zeman chce být prezident ČR.

⊢

Miloš Zeman chce být manželem Livie.

Richard Montague vs. Pavel Tichý

Montague : přirozený jazyk nespĺňuje princip kompozicionality (Frege) , protože se skládá z mnoha tzv. nepoddajnych vyrazů.

nepoddajný = význam vyrazu daného jazyka často závisí na něčem, co nebylo pojmenováno. Viz

Karel myslí na prezidenta České republiky.

Karel myslí na manžela Livie Klausové. ³

Cvičení: zkusme vyhodnotit: (i) v roce (světě) 2020 (ii) v roce 2009: ?

Montague : denotátem (nebo referencí) vyrazu prezident ČR jeho extenze,(hodnota v aktuálním světě a čase,) osoba Václava Klause, stejně tak : Václav Klaus denotátem vyrazu manžel Livie Klausové. **Nicméně reference obou vět již shodné nejsou,** Karel může myslet na prezidenta ČR, aniž by myslel na manžela Livie Klausové. Tuto neshodu Montague vidí a připisuje ji tím, že dané vyrazy jsou nepoddajné a dále neřeší.

³Daniel Balík, Montaguova logika ve srovnání s Transparentní intenzionální logikou, DP FF MU2009

Transparentní intezionální logika

*Karel myslí na prezidenta České republiky.
Karel myslí na manžela Livie Klausové.*

(Podle TIL) příklad neříká nic o tom, že Karel myslí na Václava Klause, denotátem vyrazu prezident ČR není Václav Klaus.

Denotátem tohoto vyrazu je **individuová role, intenze**. Václav Klaus je nahodily držitel této role v aktuálním světě a čase, je **referencí**

Jednoduchý ? příklad

viz příklad na str.16

[Introduction to Pavel Tichy and Transparent Intensional Logic](#)

v interaktivní osnově

Extenze a intenze

Definujeme

- **intenze** – objekty typu funkcí, jejichž hodnoty závisí na světě a čase
- **extenze** – ostatní objekty (na světě a čase nezávislé)

časté extenze a intenze:

extenze	intenze
individua	individuové role
třídy	vlastnosti
relace	vztahy
pravdivostní hodnoty	propozice
funkce	empirické funkce
čísla	veličiny

Logická analýza přirozeného jazyka

logická analýza PJ – analýza **významu** výrazů (vět) PJ
přirozený **jazyk** (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

pojem – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

Logická analýza přirozeného jazyka

logická analýza PJ – analýza **významu** výrazů (vět) PJ
přirozený **jazyk** (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

pojem – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

– **pojem** \neq **výraz** – např. výrazy v různých jazycích často reprezentují stejný pojem (**pojem**(“prvočíslo”) \equiv **pojem**(“prime number”))

Logická analýza přirozeného jazyka

logická analýza PJ – analýza **významu** výrazů (vět) PJ
přirozený **jazyk** (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

pojem – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

- **pojem** \neq **výraz** – např. výrazy v různých jazycích často reprezentují stejný pojem (**pojem**(“prvočíslo”) \equiv **pojem**(“prime number”))
- **pojem** \neq **představa** – představa je *subjektivní*, pojem je **objektivní**

Logická analýza přirozeného jazyka

logická analýza PJ – analýza významu výrazů (vět) PJ
 přirozený jazyk (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

pojem – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

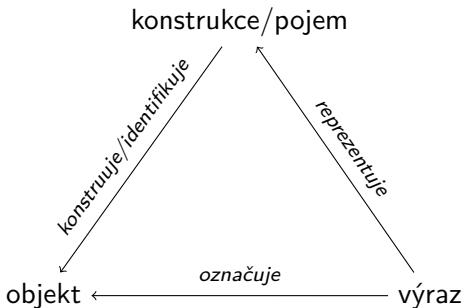
- **pojem** \neq **výraz** – např. výrazy v různých jazycích často reprezentují stejný pojem (**pojem**(“prvočíslo”) \equiv **pojem**(“prime number”))
- **pojem** \neq **představa** – představa je *subjektivní*, pojem je *objektivní*
- pojmy mohou identifikovat různé objekty:
 - jedno individuum – **individuální pojmy** (např. **Petr**, **Pegas**, **prezident ČR**)
 - třídu objektů – **vlastnost** (např. **červený**, **šelma**, **hora**)
 - *n*-člennou relaci – **vztah** (např. **otec (někoho)**, **křivdit (někdo někomu)**)
 - pravdivostní hodnotu – **propozice** (např. **v Brně prší**)
 - funkcionální přiřazení – **empirické funkce** (např. **rychlost**)
 - číslo – (fyzikální) **veličiny** (např. **rychlost světla**)

Vztah pojmu a výrazu

ve zjednodušené podobě: **pojem** odpovídá logické **konstrukci**

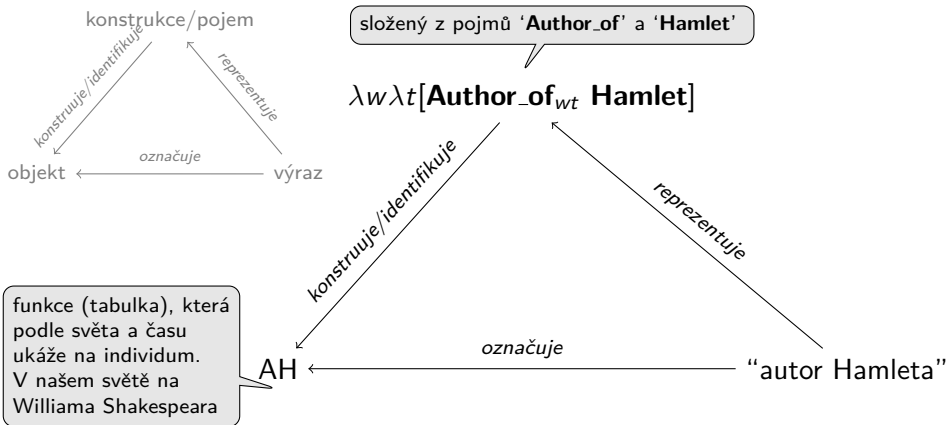
Vztah pojmu a výrazu

ve zjednodušené podobě: **pojem** odpovídá logické **konstrukci**



Vztah pojmu a výrazu

ve zjednodušené podobě: **pojem** odpovídá logické **konstrukci**



Pavel Tichý

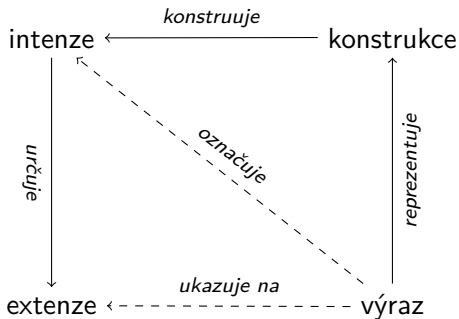
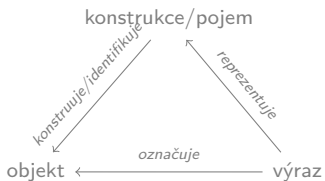
- a) logickou analýzou nemůže být překlad výrazu NL (NLE), měl by spíše **pojmenovat** vše, co je vyjádřeno výrazem
- b) logická analýza nemůže najít více skutečností než těch, která jsou skutečně uvedené ve větě / výrazu NL jsou přiřazené **a priori**.

Pavel Tichý, The Foundations of Frege's Logic, de Gruyter, Berlin, New York, 1988.

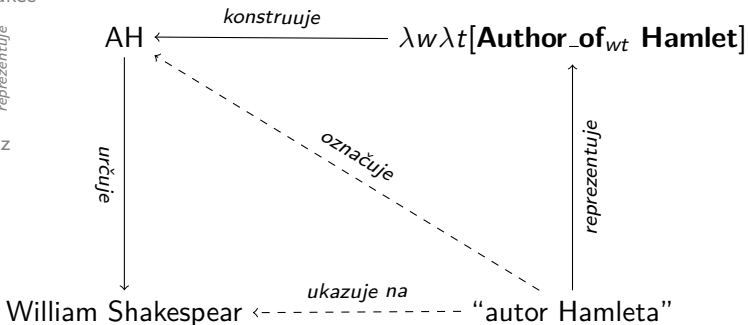
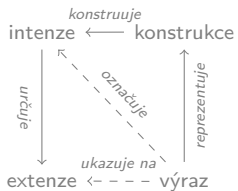
Transparentní intenzionální logika

- **Transparent Intensional Logic, TIL**
- **logický systém** speciálně navržený pro zachycení **významu výrazů PJ**, autor **Pavel Tichý**
- Tichý vychází z myšlenek – *Gottlob Frege* (1848 – 1925, logik) a *Alonzo Church* (1903 – 1995, teorie typů)
- obdobná teorie – *Montagueho intenzionální logika* – Tichý ukazuje její nedostatky
- vlastnosti:
 - rozvětvená **typová hierarchie** (s typy **vyšších řádů**)
 - **temporální**
 - **intenzionální** (intenze \times extenze)
- **transparentost**:
 1. nositel významu (**konstrukce**) není prvek formálního aparátu, tento aparát pouze *studuje* konstrukce
 2. zachycení intenzionality je přesně popsáno z matematického hlediska

Rozšířený vztah výrazu a významu u intenzí



Rozšířený vztah výrazu a významu u intenzí



Základní typy TILu

umožňují přiřadit typ objektům z **intenzionální báze** jazyka – třída **základních vlastností** (barvy, rozměry, postoje, ...) popisujících stav světa

- **o** (omikron, o) ... **pravdivostní hodnoty** Pravda (*true*, T) a Nepravda (*false*, F)
přesně odpovídají běžným logikám, typy **logických operátorů** – (*oo*), (*ooo*)
- **l** (jota) ... třída **individuí**
individua ovšem ne jako kompletní objekty, ale jako **numerická identifikace** nestrukturované entity
- **τ** (tau) ... třída **časových okamžiků** (jako časového kontinua)
zachycení závislosti na čase; současně třída **reálných čísel**
- **ω** (omega) ... třída **možných světů**
zachycení empirické závislosti na stavu světa

Typy v TILu

typ objektu:

- základní typy – **typová báze** = $\{o, \iota, \tau, \omega\}$
- funkcionální typy – **funkce** nad typovou bází
 např. $\iota, ((\iota\tau)\omega), (o\iota), (((o\iota)\tau)\omega), ((o\tau)\omega), \dots$
 $((\alpha\tau)\omega) \dots$ závislost na světě a čase, vyjadřuje **intenze** – zápis $\alpha_{\tau\omega}$
- typy **vyšších řádů** – obsahují i třídy konstrukcí řádu $n - *n$

Možné světy

termín **možný svět** – Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716, filozof a matematik)

- \forall možný svět je:
- soubor **myslitelných faktů**
 - je **konzistentní** a **maximální** ze všech takových souborů
 - je **objektivní** (nezávislý na individuálním názoru)

mezi možnými světy \exists právě jeden **aktuální svět** – jeho znalost \equiv vševědoucnost

Možné světy

termín **možný svět** – Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716, filozof a matematik)

\forall možný svět je:

- soubor **myslitelných faktů**
- je **konzistentní** a **maximální** ze všech takových souborů
- je **objektivní** (nezávislý na individuálním názoru)

mezi možnými světy \exists právě jeden **aktuální svět** – jeho znalost \equiv vševědoucnost

možný svět v TILu = **rozhodovací systém**, pro \forall prvek intenzionální báze obsahuje **konzistentní přiřazení hodnot**

Možné světy

termín **možný svět** – Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716, filozof a matematik)

- \forall možný svět je:
- soubor **myslitelných faktů**
 - je **konzistentní** a **maximální** ze všech takových souborů
 - je **objektivní** (nezávislý na individuálním názoru)

mezi možnými světy \exists právě jeden **aktuální svět** – jeho znalost \equiv vševědoucnost

možný svět v TILu = **rozhodovací systém**, pro \forall prvek intenzionální báze obsahuje **konzistentní přiřazení** hodnot

příklad – realita s **2 objekty** a **2 vlastnostmi** (9 možných světů w_1, \dots, w_9):

být hubený	být tlustý			
	{Laurel, Hardy}	{Laurel}	{Hardy}	\emptyset
{Laurel, Hardy}	×	×	×	w_1
{Laurel}	×	×	w_2	w_3
{Hardy}	×	w_4	×	w_5
\emptyset	w_6	w_7	w_8	w_9

Princip intenzí v TILu

být hubený	... objekt typu $(ol)_{\tau\omega}$, funkce z možných světů a času do tříd individuí
w	... proměnná typu ω , možný svět
t	... proměnná typu τ , časový okamžik
[být hubený $w t$]	... konstruuje (ol) -objekt, třídu individuí, kteří mají ve světě w a čase t vlastnost být hubený (značíme být hubený _{wt})

Princip intenzí v TILu

být hubený ... objekt typu $(ol)_{\tau\omega}$, funkce z možných světů a času do tříd individuí

w ... proměnná typu ω , možný svět

t ... proměnná typu τ , časový okamžik

[být hubený $w t$] ... konstruuje (ol) -objekt, třídu individuí, kteří mají ve světě w a čase t vlastnost **být hubený** (značíme **být hubený** _{$w t$})

pokud aplikujeme jen w – získáme **chronologii**

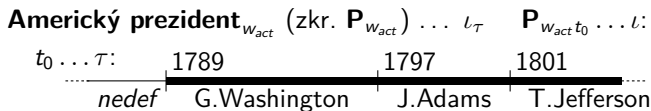
Americký prezident _{w_{act}} (zkr. **P** _{w_{act}}) ... l_{τ} **P** _{$w_{act} t_0 \dots l$} :

$t_0 \dots \tau$:	1789	1797	1801
<i>ndef</i>	G.Washington	J.Adams	T.Jefferson

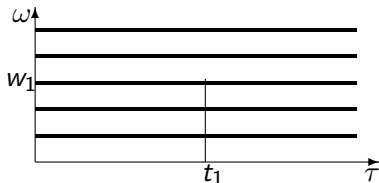
Princip intenzí v TILu

být hubený	... objekt typu $(ol)_{\tau\omega}$, funkce z možných světů a času do tříd individuí
w	... proměnná typu ω , možný svět
t	... proměnná typu τ , časový okamžik
[být hubený $w t$]	... konstruuje (ol) -objekt, třídu individuí, kteří mají ve světě w a čase t vlastnost být hubený (značíme být hubený_{wt})

pokud aplikujeme jen w – získáme **chronologii**



intenzionální sestup –
identifikace extenze pomocí
intenze, světa w_1 a času t_1



Nejčastější typy

<i>extenze</i>			<i>intenze</i>		
individua	...	ι	individuové role	...	$\iota_{\mathcal{T}\omega}$
třídy	...	$(o\iota)$	vlastnosti	...	$(o\iota)_{\mathcal{T}\omega}$
relace	...	$(o\alpha\beta)$	vztahy	...	$(o\alpha\beta)_{\mathcal{T}\omega}$
pravdivostní hodnoty	...	o	propozice	...	$o_{\mathcal{T}\omega}, \pi$
funkce	...	$(\alpha\beta)$	empirické funkce	...	$(\alpha\beta)_{\mathcal{T}\omega}$
čísla	...	τ	veličiny	...	$\tau_{\mathcal{T}\omega}$

Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.

$$\lambda w \lambda t \left[\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Země} \right] \right] \right] \right] \right]$$

Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.

$$\lambda w \lambda t \left[\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě} \right] \right] \right] \right] \right]$$

- existence neexistujícího

Pes existuje. Jednorozec neexistuje.

v PL1: $\exists x(x = \text{pes})$ $\neg \exists x(x = \text{jednorozec})$

Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.

$$\lambda w \lambda t [\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 [\lambda w \lambda t [\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 [\lambda w \lambda t [\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě}]]]]]]$$

- existence neexistujícího

Pes existuje. Jednorožec neexistuje.

v PL1: $\exists x(x = \text{pes}) \quad \neg \exists x(x = \text{jednorožec})$
 $(\text{jednorožec} = \text{jednorožec}) \Rightarrow (\exists x(x = \text{jednorožec}))$

Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.

$$\lambda w \lambda t [\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 [\lambda w \lambda t [\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 [\lambda w \lambda t [\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě}]]]]]]$$

- existence neexistujícího

Pes existuje. Jednorožec neexistuje.

v PL1: ~~$\exists x(x = \text{pes})$~~ ~~$\neg \exists x(x = \text{jednorožec})$~~
 (jednorožec = jednorožec) \Rightarrow ($\exists x(x = \text{jednorožec})$)

Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.

$$\lambda w \lambda t \left[\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{i}_{wt} \text{Tom}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{k} \text{u} \text{l} \text{á} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě} \right] \right] \right] \right] \right]$$

- existence neexistujícího

Pes existuje. Jednorožec neexistuje.

v PL1: ~~$\exists x(x = \text{pes})$~~ ~~$\neg \exists x(x = \text{jednorožec})$~~
 (jednorožec = jednorožec) \Rightarrow ($\exists x(x = \text{jednorožec})$)

v TILu: (*) $\lambda w \lambda t \left[{}^0 \neg [E_{xwt} \text{jednorožec}] \right]$
 $E_x \stackrel{df}{=} \lambda w \lambda t \lambda p \left[{}^0 \sum_{\iota} [\lambda x [p_{wt} x]] \right], \quad E_x \dots (o(o\iota)_{\tau\omega})_{\tau\omega}$
 (*) ... "třída všech individuí s vlastností 'být jednorožcem' je v daném světě a čase prázdná."

Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.

$$\lambda w \lambda t \left[\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{i}_{wt} \text{Tom}^0 \left[\lambda w \lambda t \left[\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě} \right] \right] \right] \right] \right]$$

- existence neexistujícího

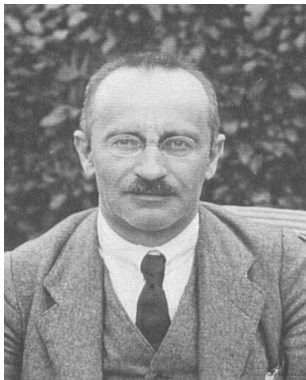
Pes existuje. Jednorožec neexistuje.

v PL1: ~~$\exists x(x = \text{pes})$~~ ~~$\neg \exists x(x = \text{jednorožec})$~~
 (jednorožec = jednorožec) \Rightarrow ($\exists x(x = \text{jednorožec})$)

v TILu: (*) $\lambda w \lambda t \left[{}^0 \neg [E_{xwt} \text{jednorožec}] \right]$
 $E_x \stackrel{df}{=} \lambda w \lambda t \lambda p \left[{}^0 \sum_{\iota} [\lambda x [p_{wt} x]] \right], \quad E_x \dots (o(o\iota)_{\tau\omega})_{\tau\omega}$
 (*) ... "třída všech individuů s vlastností 'být jednorožcem' je v daném světě a čase prázdná."

- intenzionalita, vlastnosti vlastností, analýza epizod, analýza gramatického času, ...

Vícehodnotová logika



Od dvouhodnotové k tříhodnotové logice

nepravda (0) - pravda (1)

nepravda (0) - nevím (1/2) - pravda (1)

zavedeme funkci $val(A)$ = pravdivostní hodnota formule A

např. $I(p) = 1, I(q) = 0$, pak např. $val(p) = 1, val(\neg p) = 0,$
 $val(p \wedge q) = 0, val(p \Rightarrow q) = 0$

Pak, v souhlasu se sémantikou logických spojek, jistě platí

$val(\neg A) = 1 - val(A), val(A \wedge B) = \min(val(A), val(B)),$
 $val(A \vee B) = \max(val(A), val(B))$

(pro další spojky je možno spočítat z těchto tří)

Trojhodnotová Łukasiewiczova logika

zobecníme funkci $val()$ pro tříhodnotovou logiku. A jsme tam ... ?

Neplatí např. princip vyloučení třetího. Jistě.

Potíž: jen velmi málo tautologií v takové logice najdeme.

Zkusme nadefinovat jinak implikaci

p/q	$\neg p \vee q$			nová definice		
0	0	1/2	1	0	1/2	1
1/2	1	1	1	1	1	1
1	1/2	1/2	1	1/2	1	1
	0	1/2	1	0	1/2	1

$$val(p \Rightarrow q) = \min(1, 1 - val(p) + val(q))$$

K sémantice Łukasiewiczovy logiky

Opět pracujeme s pojmem **interpretace**, tj. přiřazením pravdivostních hodnot z $\{0, 1/2, 1\}$ výrokovým symbolům

Model formule ϕ je taková interpretace, kdy $val(\phi) > 0$

Formule ϕ **sémanticky vyplývá z množiny premis** Φ , $\Phi \models \phi$, jestliže pro každou interpretaci I $val(\Phi) \leq val(\phi)$

Cvičení: dokažte, že pokud $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$, pak $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \Rightarrow \phi$.

Fuzzy logika. Lotfi Zadeh

vychází z fuzzy množin, kdy příslušnost do množiny je z intervalu $[0, 1]$ a fuzzy relací.

Příklad: množina "být mladý"

stejná funkce $val()$, jen nepracujeme s diskrétní doménou $\{0, 1/2, 1\}$ ale intervalem $[0, 1]$

dále analogicky jako pro trojhodnotovou logiku

Víme a známe

- co jsou modální logiky
- modality "nutně", "možná"
- jiné modality a temporální logiky
- a něco k tomu z těch nejobecnějších intenzionálních logik
- především nástin Tichého TILu
- tříhodnotové a fuzzy logiky

Informační zdroje

Non-monotonic logic, viz Logic for Applications

Stanford Encyclopedia of Philosophy, un peut updated <https://Stanford Encyclopedia of Philosophy, un peut updated/plato.stanford.edu/entries/logic-ai/>

JELIA: European Conference on Logics in Artificial Intelligence. last issue 2019

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-19570-0>