Lineární programování

- *úvod*

= optimalizace lineární funkce na množině, omezené lineárními funkcemi

Jsme schopni nalézt globální minimum.

Lineární programování
- *příklad*

Čokoládovna vyrábí 5 druhů výrobků. Jsou to výrobky V_1, V_2, V_3, V_4, a V_5. Spotřebovává k tomu 3 základní surovniny: tuk, kakao a cukr. Tyto suroviny jsou k dispozici v omezených množstvích: 1500 kg tuku, 450 kg kakaa a 300 cukru na den.

Kapacita strojního zařízení je dostatečná, totéž se týká energie a pracovních sil, i další zdroje jsou k dispozici v dostatečném množství.

Lineární programování
- *příklad II*

Spotřeba surovin na 1 kg výrobku je dána tabulkou:

	V1	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**
Tuk	-	0,4	0,3	0,6	0,6
Kakao	0,05	0,2	0,1	0,1	-
Cukr	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2
Cena [Kč/kg]	20	120	100	140	40

V tabulce jsou uvedeny rovněž ceny 1 kg každého výrobku.

Lineární programování
- *příklad*

Výrobky jsou vyráběny technologicky nezávisle na sobě navzájem. Výroba se tedy uskutečňuje ve formě pěti výrobních procesů, které však nejsou navzájem zcela izolované, neboť společně spotřebovávají výrobní zdroje, jeden proces na úkor druhého.

Pro účely matematické formulace zaveďme 5 proměnných x_j, popisujících množství výrobku V_j v kg (jen vzhledem k našim 3 surovinám).

Lineární programování
- *příklad*

Matematická formulace úlohy:

Hledáme tedy nezáporné hodnoty proměnných $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, ..., 5$), vyhovující nerovnostem:

$$
\begin{aligned}
0{,}4.x_2 + 0{,}3.x_3 + 0{,}6.x_4 + 0{,}6.x_5 &\leq 1500 \\
0{,}05.x_1 + 0{,}2.x_2 + 0{,}1.x_3 + 0{,}1.x_4 &\leq 300 \\
0{,}1.x_1 + 0{,}2.x_2 + 0{,}2.x_3 + 0{,}1.x_4 + 0{,}2.x_5 &\leq 450
\end{aligned}
$$

a maximalizující účelovou funkci:

$$f(x) = 20.x_1 + 120.x_2 + 100.x_3 + 140.x_4 + 40.x_5$$

Lineární programování

\- *příklad*

Optimální řešení tohoto problému:

$x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = 1000;\ x_4^* = 2000;\ x_5^* = 0$

Maximální hodnota účelové funkce:

$f(x^*) = 380\,000$ Kč

Poznámka: Úlohu lze také následovně rozšířit: Výrobku V_1 musí být alespoň 100 kg a výrobku V_5 alespoň 200 kg. Pak nezměněná matematická formulace bude navíc obohacena dvěma nerovnostmi:

$x_1 \geq 100;\ x_5 \geq 200$

Lineární programování

- *aplikace*

Výrobní plán: Cílem je určit, kolik vyrábět kterého výrobku tak, abychom maximalizovali zisk. Víme, kolik které suroviny potřebujeme na jednotlivé výrobky. Známe množství surovin, které máme k dispozici.

Dopravní plán: Cílem je určit kolik kterých výrobků přepravovat po jednotlivých trasách od výrobce ke spotřebitelům tak, abychom měli co nejnižší náklady.

Lineární programování
- *aplikace II*

Směšovací problém: Chceme vyrobit slitinu předepsaného složení ze surovin se známým složením tak, abychom dodrželi metalurgické předpisy a minimalizovali náklady.

Řízení zásob: Cílem je plánovat nákupy tak, abychom uspokojili poptávku a přitom minimalizovali náklady na uskladnění.

Lineární programování
- *aplikace III*

Regresní analýza: Cílem je proložit naměřenými hodnotami přímku tak, abychom minimalizovali maximální absolutní odchylku.

Další aplikace: Lineární programování má aplikace především v technologii (řízení výroby), ekonomice (finanční modely) a konstruování (návrh struktury).

Lineární programování
- *historie*

Starověk: V antice byly formulovány a pomocí geometrie řešeny některé izoperimetrické úlohy. Například: Najděte rovnoběžník největšího obsahu při konstantním obvodu.

Středověk: Později byly formulovány zejména úlohy založené na rozkladu čísel na součet a součin tak, aby určité kritérium mělo optimální hodnotu.

Lineární programování
- *historie II*

Novověk: S rozvojem infnitesimálního počtu se objevily nyní klasické metody pro analytické hledání extrémů (průběh funkce aj.). Následovalo postupně rozpracování teoretických poznatků, které připravilo nástroje pro 20.století.

Lineární programování
- historie III

20.století: Koncem třicátých let Kantorovič formuloval ekonomickou úlohu pomocí lineárních omezení. Během druhé světové války byly rozpracovány základy matematických metod organizace vojenských operací. V roce 1941 Hitchcock formuloval dopravní úlohu, v roce 1945 formuloval Stiegler dietní problém. V roce 1947 Dantzig formuloval úlohu později nazvanou Koopmansem úlohou lineárního programování. Navrhl algoritmus nazvaný simplexová metoda pro její řešení. V diskusi Dantziga a Von Neumanna byl zaveden pojem duality a následovala desetiletí bouřlivého rozvoje optimalizačních modelů a metod a jejich aplikací.

Lineární programování
- *obecná formulace*

Nechť jsou dány vektory a_i, $c \in R^n$ a čísla $b_i \in R$ ($i = 1, 2, ..., m$).

Poznámka: n je počet proměnných a m počet rovnic

Řešíme problém:

opt $c^T x$ opt $\in$ {min, max}

Za předpokladů:

$a_i^T.x \leq b_i$ ($i \in I_1$)

$a_i^T.x \geq b_i$ ($i \in I_2$)

$a_i^T.x = b_i$ ($i \in I - I_1 - I_2$)

kde $I = \{1, 2, ..., m\}$; $I_1 \subset I$; $I_2 \subset I$

Lineární programování

- *obecná formulace* - *příklad*

Řešíme problém:

Příklad:

max f(x) $\quad f(x) = 20.x_1 + 120.x_2 + 100.x_3 + 140.x_4 + 40.x_5$

Obecně:

opt $c^T x \quad opt \in \{min, max\}$

Konkrétně:

max $(20, 120, 100, 140, 40)^T.x$

Lineární programování

- *obecná formulace* - *příklad*

Za předpokladů:

Příklad:

$$0{,}4.x_2 + 0{,}3.x_3 + 0{,}6.x_4 + 0{,}6.x_5 \le 1500$$

$$0{,}05.x_1 + 0{,}2.x_2 + 0{,}1.x_3 + 0{,}1.x_4 \le 300$$

$$0{,}1.x_1 + 0{,}2.x_2 + 0{,}2.x_3 + 0{,}1.x_4 + 0{,}2.x_5 \le 450$$

$$x_1 \ge 100$$

$$x_5 \ge 200$$

Obecně:

$$a_i^T.x \le b_i \qquad (i \in I_1)$$

$$a_i^T.x \ge b_i \qquad (i \in I_2)$$

$$a_i^T.x = b_i \qquad (i \in I - I_1 - I_2)$$

kde $I = \{1, 2, ..., m\}$; $I_1 \subset I$; $I_2 \subset I$

Lineární programování

- *obecná formulace* - *příklad*

Konkrétně: $(0, 0.4, 0.3, 0.6, 0.6)^T.x \leq 1500$

$(0.05, 0.2, 0.1, 0.1, 0)^T.x \leq 300$

$(0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2)^T.x \leq 450$

$(1, 0, 0, 0, 0)^T.x \geq 100$

$(0, 0, 0, 0, 1)^T.x \geq 200$

Poznámka: $n = 5$

$m = 5$

$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$I_1 = \{1, 2, 3\}$

$I_2 = \{4, 5\}$

Lineární programování

- *standardní tvar*

Obecnou formulaci úlohy lze zapsat v tzv. standardním tvaru:

Řešíme problém:

min $c^T x$

Za předpokladů:

$A.x = b$ $\quad\quad$ $A \in R^{m \times n}$

$x \geq 0$

Lineární programování

- *standardní tvar II*

Vztahy, využité při přepsání na standardní tvar:

max -> min

max f(x) = - min -f(x)

Přepis rovnic:

$a_i^T.\mathbf{x} \geq b_i \quad \Rightarrow \quad -a_i^T.\mathbf{x} \leq -b_i$

Lineární programování

- *standardní tvar III*

Nerovnost na rovnost:

$a_i^T.\mathbf{x} \leq b_i$ => $a_i^T.\mathbf{x} + x_{n+1} = b_i$, kde: $x_{n+1} \geq 0$

kde x_{n+i} je umělá proměnná, která se začlení do vektoru proměnných **x**

=> nový vektor obsahuje prvky $x_1, x_2, ..., x_n$ původního vektoru **x** a navíc pro každou i-tou nerovnost člen x_{n+i}

původní vektor **x**: $(x_1, x_2, ..., x_n)$

nový vektor **x**: $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$

Lineární programování

- standardní tvar - příklad

Příklad:

$(0,\quad 0.4,\quad 0.3,\quad 0.6,\quad 0.6)^T.x \le 1500$

$(0.05, 0.2,\quad 0.1,\quad 0.1,\quad 0)^T.x \le 300$

$(0.1,\quad 0.2,\quad 0.2,\quad 0.1,\quad 0.2)^T.x \le 450$

Přepis rovnic na tvar A.x = b:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 1500 \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$x \ge 0$$

Lineární programování
- *další definice*

Množina přípustných řešení:

$S = \{\mathbf{x};\ \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geq 0\}$

V rámci této množiny minimalizujeme funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

Přípustné řešení $\mathbf{x}^* \in S$ nazveme *optimálním řešením* úlohy, jestliže:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \qquad \forall\ \mathbf{x} \in S$$

Lineární programování

- *řešení úlohy*

Grafické řešení

Nejstarší metoda pro řešení úloh LP.

Lze použít pro úlohy se dvěma případně třemi proměnnými.

Přístup vhodný pro manuální řešení, obtížně automatizovatelný.

Simplexová metoda

Nejčastěji používaný přístup.

Lze implementovat pomocí vhodného progamovacího jazyka.

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení

Příklad:

Hledejte minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině nezáporných řešení soustavy:

$$
\begin{aligned}
2.x_1 &+ x_2 &\geq 2 \\
-3.x_1 &+ 2.x_2 &\leq 6 \\
x_1 &+ x_2 &\leq 4
\end{aligned}
$$

Lineární programování

- *řešení úlohy - grafické řešení II*

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Lineární programování

- *řešení úlohy - grafické řešení II*

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Rovnice $2.x_1 \;+\; x_2 \;\geq 2$:

Lineární programování

- *řešení úlohy* - *grafické řešení II*

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Rovnice $2.x_1 \; + \quad x_2 \quad \geq 2$:

$Px_1^1 = (1, 0)$, $Px_2^1 = (0, 2)$

Lineární programování

- *řešení úlohy* - *grafické řešení II*

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Rovnice $2.x_1 + x_2 \geq 2$:

$Px_1^1 = (1, 0)$, $Px_2^1 = (0, 2)$

Rovnice $-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$:

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení II

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Rovnice $2.x_1 + x_2 \geq 2$:

$Px_1^1 = (1, 0)$, $Px_2^1 = (0, 2)$

Rovnice $-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$:

$Px_1^2 = (-2, 0)$, $Px_2^2 = (0, 3)$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení II

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Rovnice $2.x_1 + x_2 \geq 2$:

$Px_1^1 = (1, 0)$, $Px_2^1 = (0, 2)$

Rovnice $-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$:

$Px_1^2 = (-2, 0)$, $Px_2^2 = (0, 3)$

Rovnice $x_1 + x_2 \leq 4$:

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení II

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

Rovnice $2.x_1 + x_2 \geq 2$:

$Px_1^1 = (1, 0)$, $Px_2^1 = (0, 2)$

Rovnice $-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$:

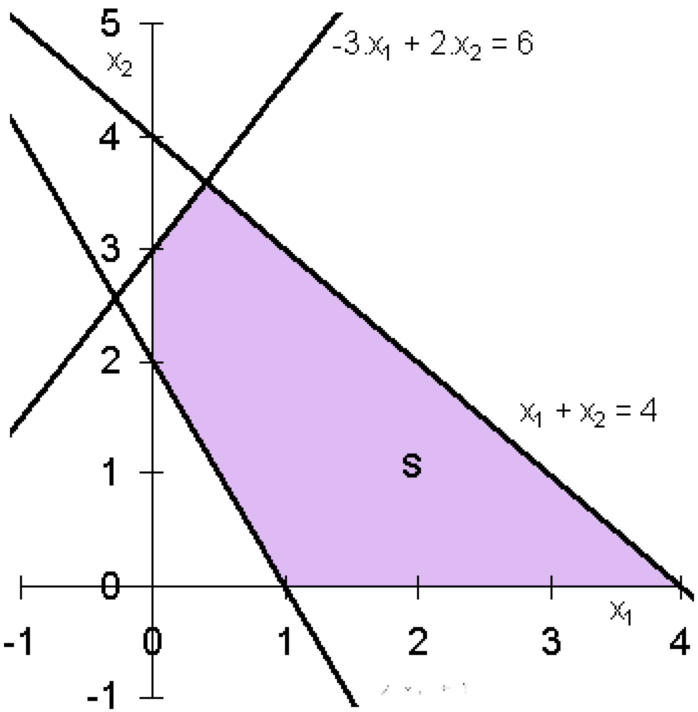
$Px_1^2 = (-2, 0)$, $Px_2^2 = (0, 3)$

Rovnice $x_1 + x_2 \leq 4$:

$Px_1^3 = (4, 0)$, $Px_2^3 = (0, 4)$

Lineární programování

- *řešení úlohy* - *grafické řešení III*



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení IV

Množinu S tedy tvoří pětiúhelník s vrcholy:

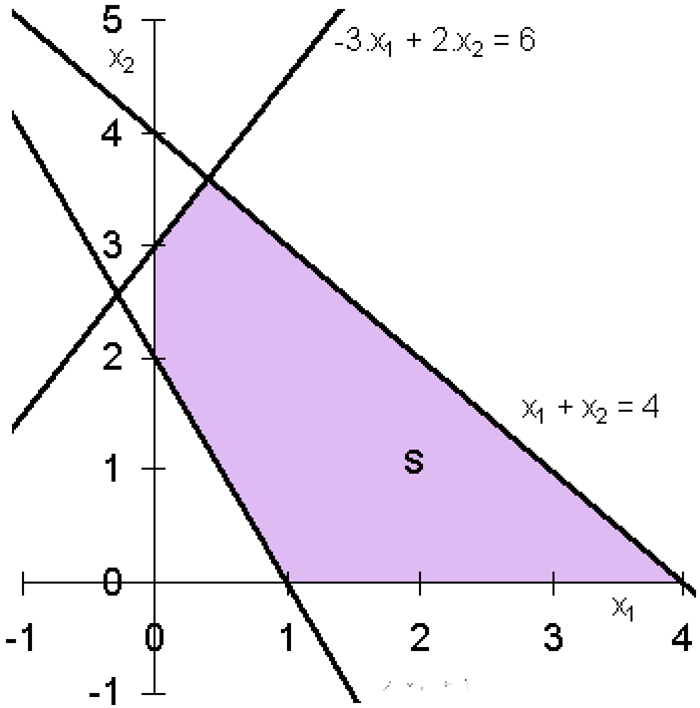
[0, 2]; [0, 3]; [1, 0]; [4, 0] a průsečík rovnic:

$x_1 + x_2 \leq 4$

$-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$

=>

[?, ?]



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení IV

Množinu S tedy tvoří pětiúhelník s vrcholy:

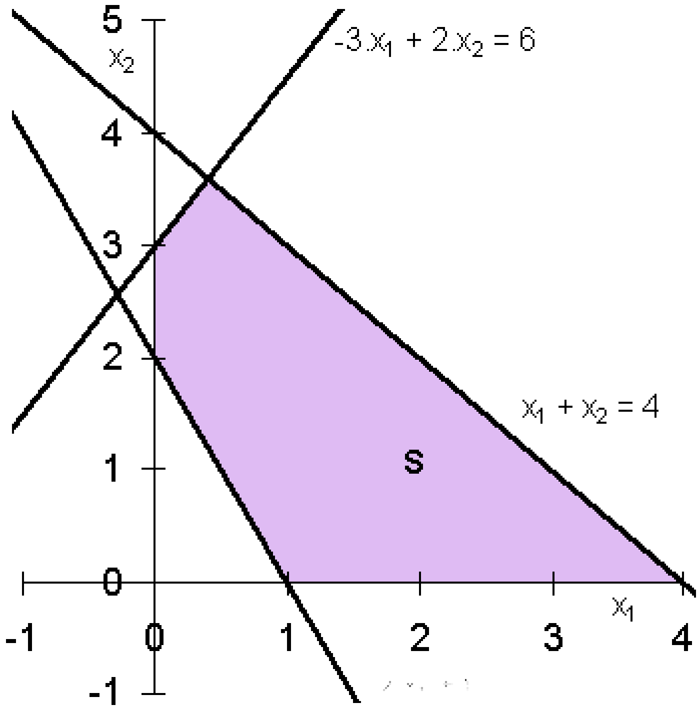
[0, 2]; [0, 3]; [1, 0]; [4, 0] a průsečík rovnic:

$x_1 \quad + \; x_2 \quad \leq 4$

$-3.x_1 + 2.x_2 \; \leq 6$

=>

[2/5, 18/5]



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení V

Hledáme minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině S.

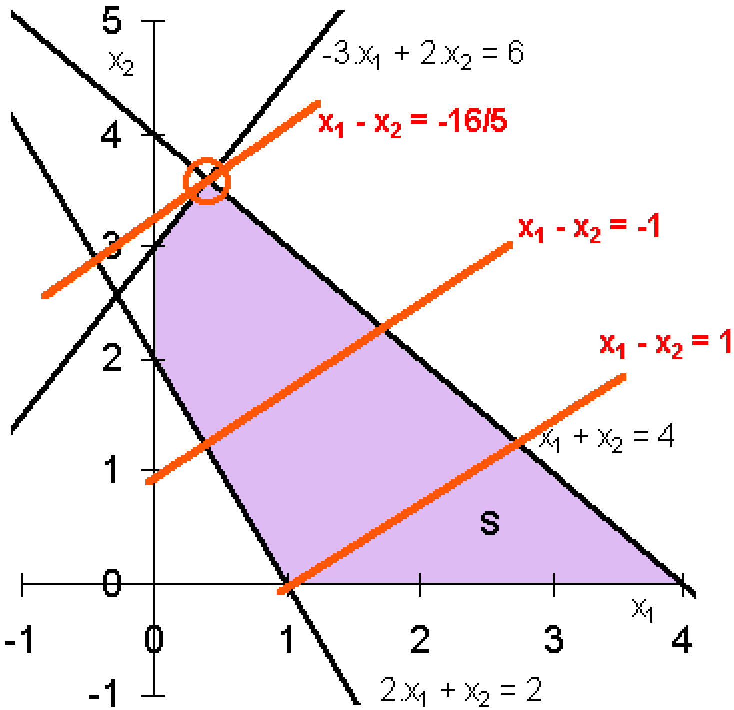
Znázorníme-li soustavu rovnoběžek:

$x_1 - x_2 = k$ pro $k \in S$

zjistíme, že funkce $f(x) = x_1 - x_2$ nabývá nejmenší hodnoty na množině S ve vrcholu [2/5, 18/5].

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení VI



Lineární programování

- *řešení úlohy* - *grafické řešení VII*

Příklad 2:

Hledejte minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině nezáporných řešení soustavy:

$2.x_1 + x_2 \geq 2$

$-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$

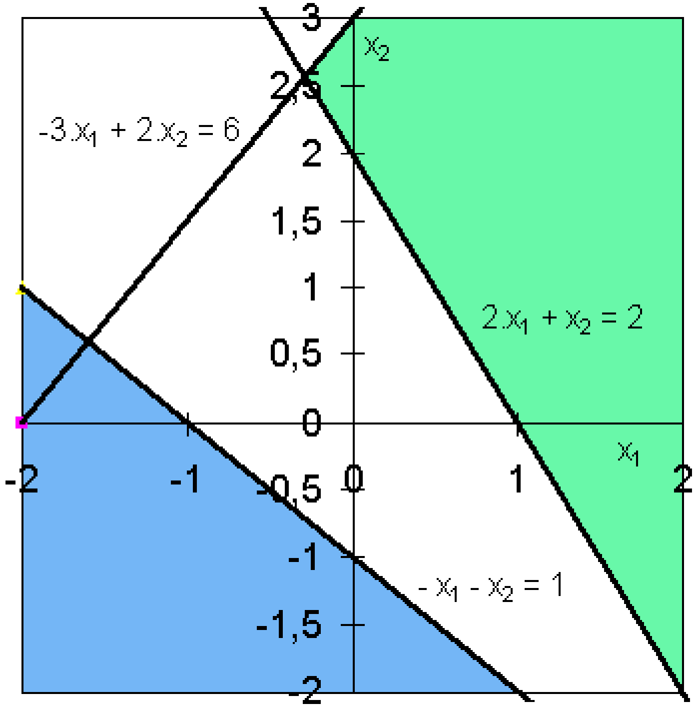
$-x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení VIII



Lineární programování

- *řešení úlohy* - *grafické řešení IX*

Hledáme minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině S.

Ale z předchozího obrázku je jasné, že $S = \emptyset$

=> nelze najít optimální řešení

Lineární programování

- *řešení úlohy* - *grafické řešení X*

Příklad 3:

Hledejte minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině nezáporných řešení soustavy:

$2.x_1 + x_2 \geq 2$

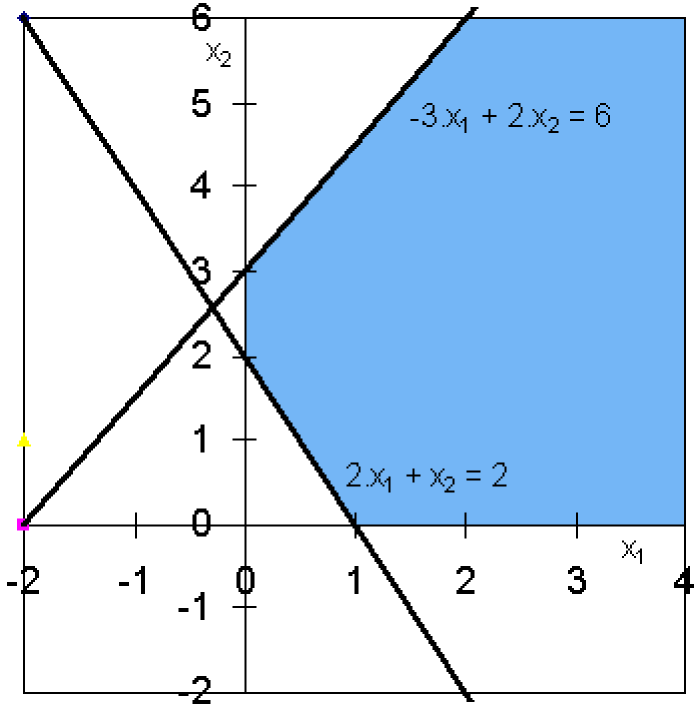
$-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení XI



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení XII

Hledáme minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině S.

Ale z předchozího obrázku je jasné, že množina S je nekonečná

=> nelze najít optimální řešení

Cvičení

- *příklad I*

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

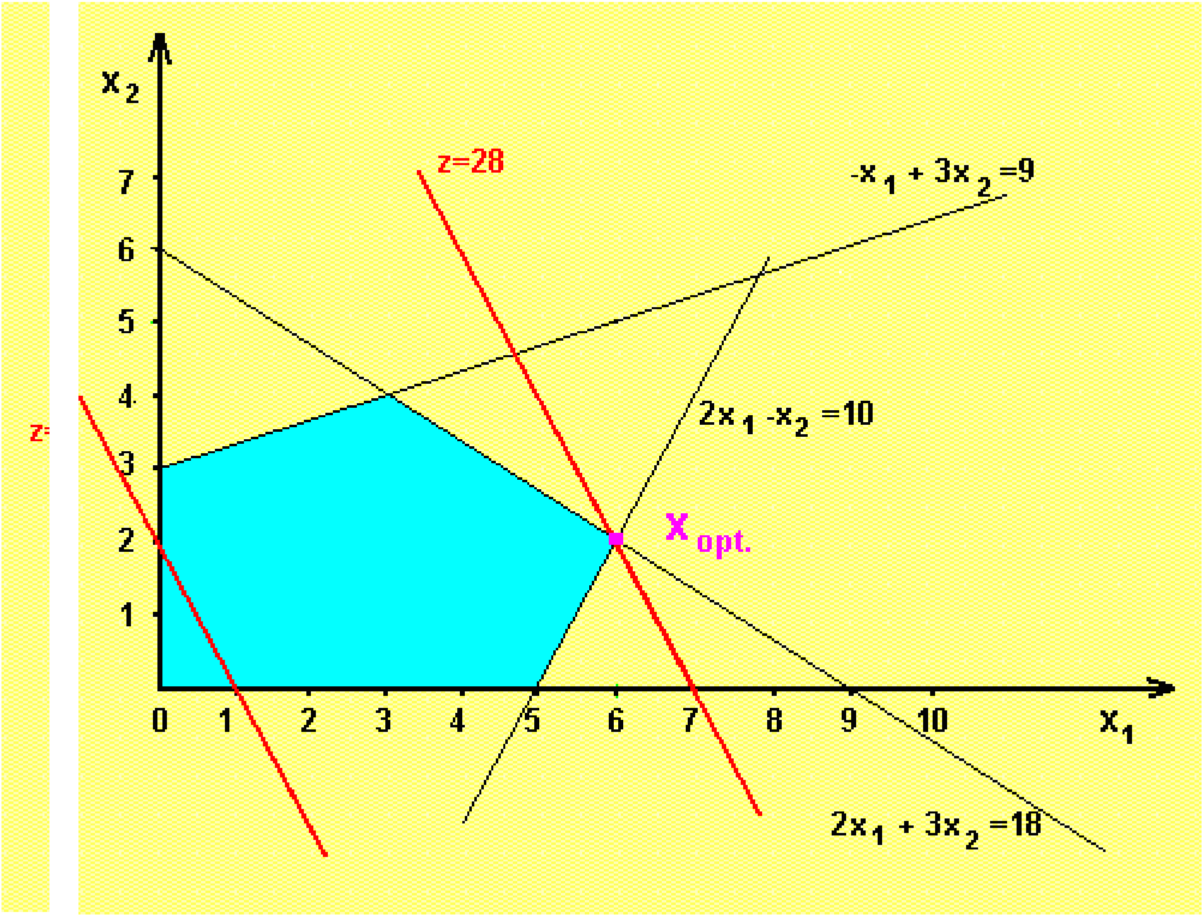
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(x) = \mathbf{4\,x_1 + 2\,x_2}$$

Cvičení

- příklad I - 2



Optimální řešení:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 2 \qquad z = 28$$

Cvičeni
- *příklad II*

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

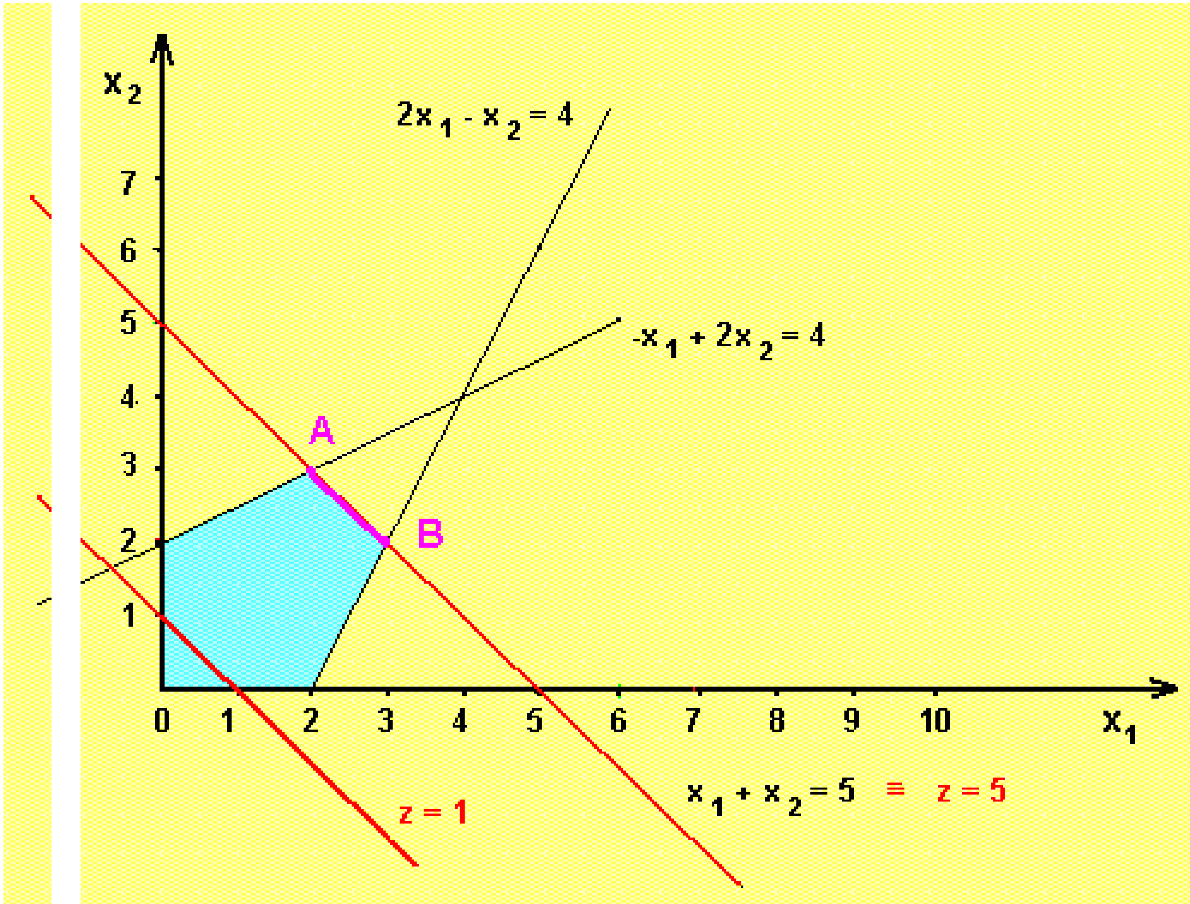
$$\begin{aligned} -\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} &\leq \mathbf{4} \\ 2\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} &\leq \mathbf{4} \\ \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} &\leq \mathbf{5} \\ \mathbf{x_1} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x_2} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(x) = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$$

Cvičeni

- příklad II - 2



Optimální řešení:Úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení - všechny body úsečky AB, pro které účelová funkce z = 5.

Cvičeni

- *příklad III*

Matematická formulace úlohy:

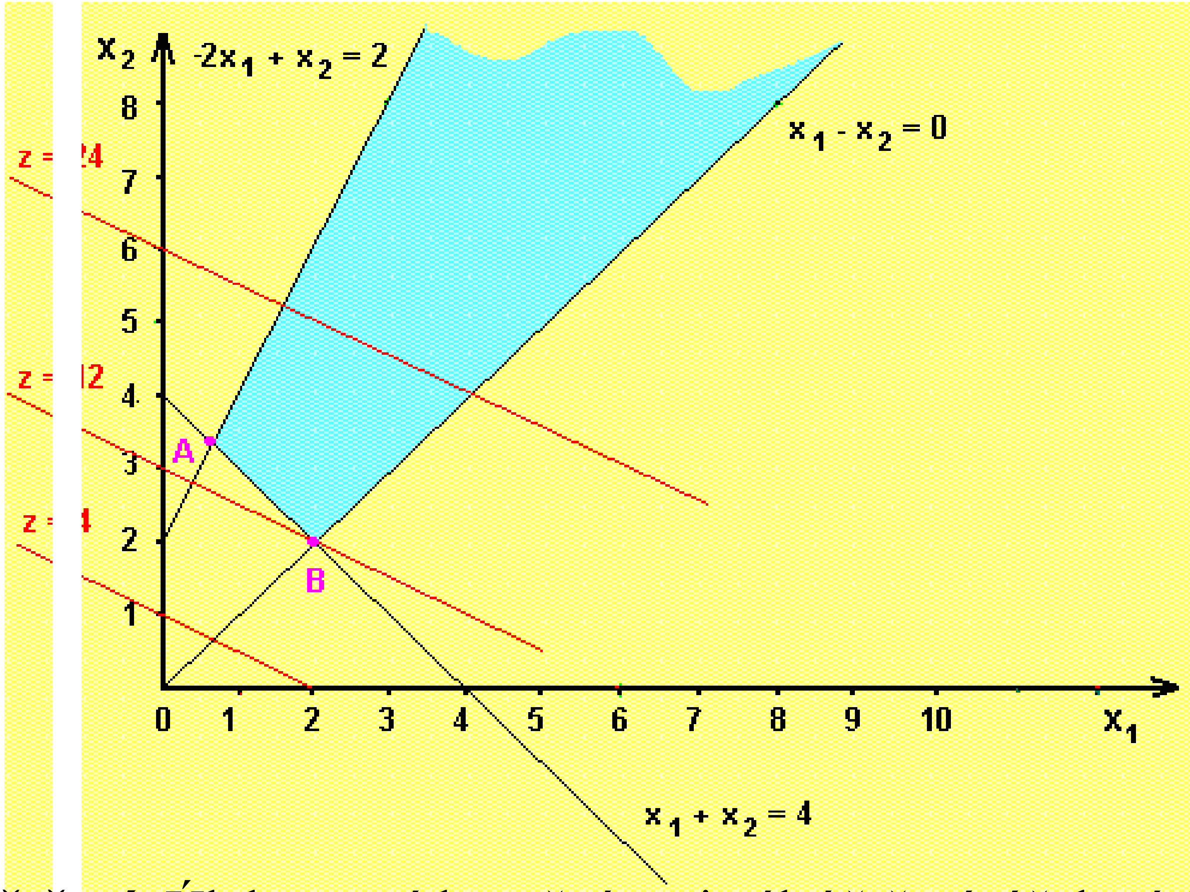
Podmínky:

$$\mathbf{x_1 + x_2 \geq 4}$$
$$\mathbf{-2x_1 + x_2 \leq 2}$$
$$\mathbf{x_1 - x_2 \leq 0}$$
$$\mathbf{x_1 \geq 0}$$
$$\mathbf{x_2 \geq 0}$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(x) = \mathbf{2x_1 + 4x_2}$$

Cvičení *příklad III* - *2*



Optimální řešení: Úloha nemá konečné optimální řešení, účelová funkce může na neomezené množině přípustných řešení nabývat libovolně velkých hodnot. V případě, že bychom řešili minimalizační problém, tj. hledali minimum funkce z = $2x_1 + 4x_2$ při stejných omezujících podmínkách, optimální řešení by odpovídalo bodu B.

Cvičení

- *příklad IV*

Podnik vyrábí 4 druhů výrobků. Jsou to výrobky V_1, V_2, V_3 a V_4. Spotřebovává k tomu materiál m (kg) a práci p (hodiny). Pro výrobky platí:

	V1	**V2**	**V3**	**V4**
Materiál [kg]	4	1	2	2
Práce [hodiny]	2	5	1	3
Cena [Kč]	5	8	3	4

Každý den je k dispozici 30 kg materiálu a 50 hodin práce. V jakém množství vyrábět V_1, V_2, V_3 a V_4 tak, aby byl maximální zisk.

Cvičeni

- *příklad IV* - *2*

Matematická formulace úlohy:

Hledáme tedy nezáporné hodnoty proměnných $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), vyhovující nerovnostem:

$4.x_1 + x_2 + 2.x_3 + 2.x_4 \geq 30$ (omezení na materiál)

$2.x_1 + 5.x_2 + x_3 + 3.x_4 \geq 50$ (omezení na práci)

a maximalizující účelovou funkci:

$f(x) = 5.x_1 + 8.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4$

Cvičeni

- příklad V

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$x_1 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq 0$

$2.x_1 - x_2 \leq 2$

Maximalizace účelové funkce:

$f(x) = x_1 - x_2$

Cvičení

- *příklad VI*

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 \leq 40$

$2.x_1 + x_2 \leq 60$

Maximalizace účelové funkce:

$f(x) = 4.x_1 - 3.x_2$