Lineární programování

- simplexová metoda - teorie

DEF:

Množina $S \subset R^n$ je **konvexní**, pokud $\forall x_1, x_2 \in S$:

$\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \in S$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$.

DEF:

Bod $\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$ pro $\lambda \in [0, 1]$ se nazývá **konvexní kombinací** x_1 a x_2.

Lineární programování

- simplexová metoda - teorie II

DEF:

Konvexní obal množiny S je nejmenší konvexní množina obsahující S. Označuje se **conv(S)**.

DEF:

Množina $P \subset R^n$ je **konvexní polyedr**, pokud P je konvexním obalem konečné množiny.

Lineární programování
- simplexová metoda - teorie III

DEF:

Simplex je konvexní polyedr $P = \text{conv}\{v_0, \ldots, v_m\} \subset R^n$, kde $v_m - v_0, \ldots, v_1 - v_0$ jsou lineárně nezávislé. Pokud tedy $m = n$, jde o konvexní obal $n + 1$ bodů s nenulovým objemem v R^n.

DEF:

Polyedrická množina je průnikem konečného počtu poloprostorů (lze je zapsat ve tvaru $\{x \in R^n;\ a^T x \geq \alpha\}$, kde $a \in R^n$, $\alpha \in R$).

Je zřejmé, že množina přípustných řešení každé úlohy lineárního programování je polyedrická.

Lineární programování

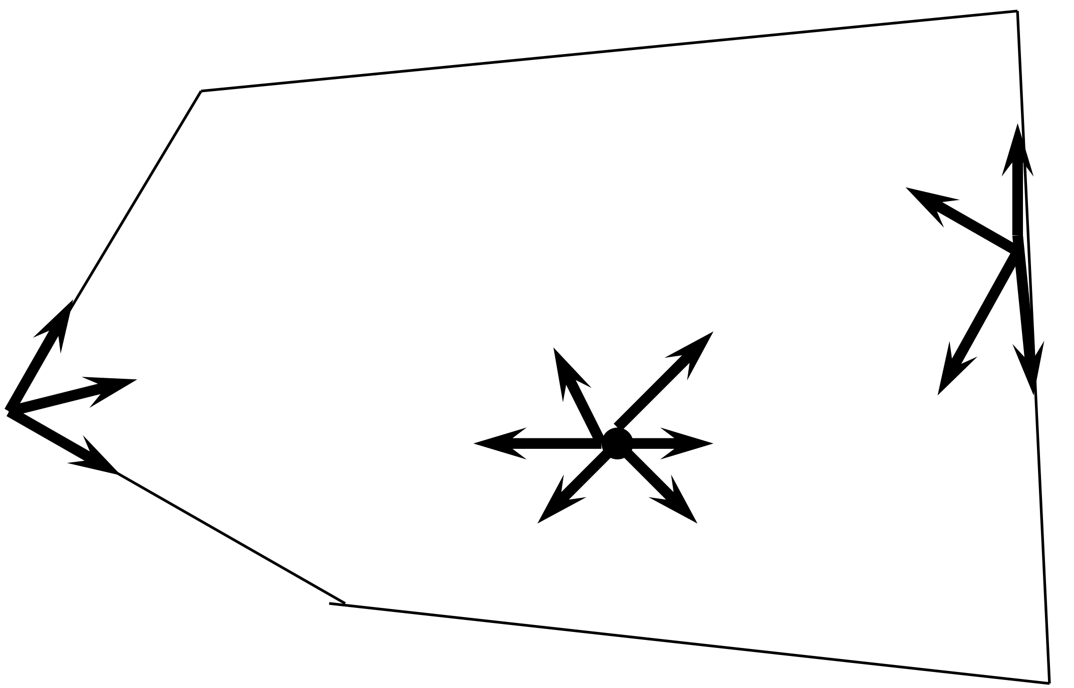
- simplexová metoda - teorie IV

DEF: **Krajní bod** konvexní množiny $S \subseteq R^n$ je prvek S, který není netriviální konvexní kombinací dvou různých bodů z S. Neexistuje $y_1, y_2 \in S, y_1 \neq y_2, \lambda \in (0, 1): x = \lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2$.

Lineární programování

- *simplexová metoda - teorie IV*

DEF: **Směr** (v bodě $x \in S$) v uzavřené konvexní množině $S \subseteq R^n$ je takový nenulový vektor $d \in R^n$, pro který $\exists\ \alpha > 0$: $x + \alpha \cdot d \in S$.

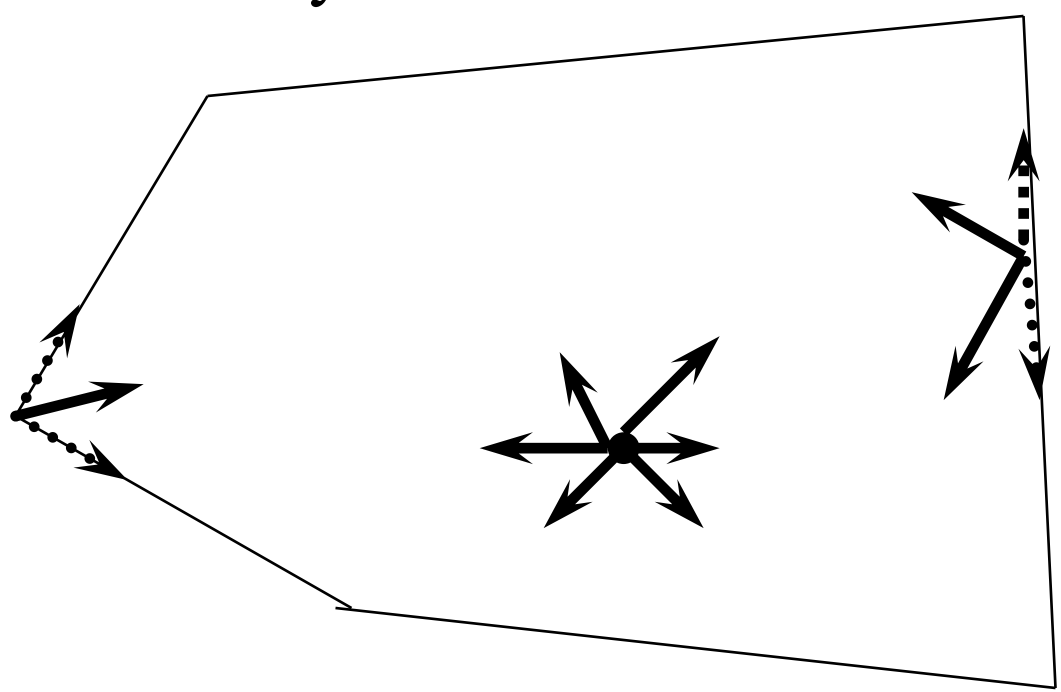


Lineární programování

- simplexová metoda - teorie V

DEF:

Krajní směr je směr, který není kladnou lineární kombinací dvou různých směrů.



Lineární programování
- *simplexová metoda - teorie VI*

Věta:

Kladná lineární kombinace směrů je opět směrem:

Je-li $\alpha_1, \alpha_2 > 0$:

$x + \alpha_1 \cdot d_1 \in S$

$\Rightarrow x + \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2 \in S$

$\Rightarrow x + \beta \cdot (\alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2) \in S$ pro $\beta \geq 0$.

DEF:

Krajní směr je směr, který není kladnou lineární kombinací dvou různých směrů.

Lineární programování
- *charakteristika krajních bodů*

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in R^{m \times n}$ a $h(A) = m$.

$x \in S$ je krajní bod $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ po permutaci sloupců matice A (a odpovídajících složek vektoru x) lze matici A vyjádřit jako $A = (B \mid N)$, tak že platí:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

kde $B \in R^{m \times m}$ je regulární a $B^{-1}.b \geq 0$.

Lineární programování

- *vlastnosti krajních bodů*

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$.

Pak platí:

a) Existuje krajní bod množiny S.

b) Každý krajní bod množiny S má nejvýše m kladných složek.

c) Množina S má nejvýše $\binom{n}{m}$ krajních bodů.

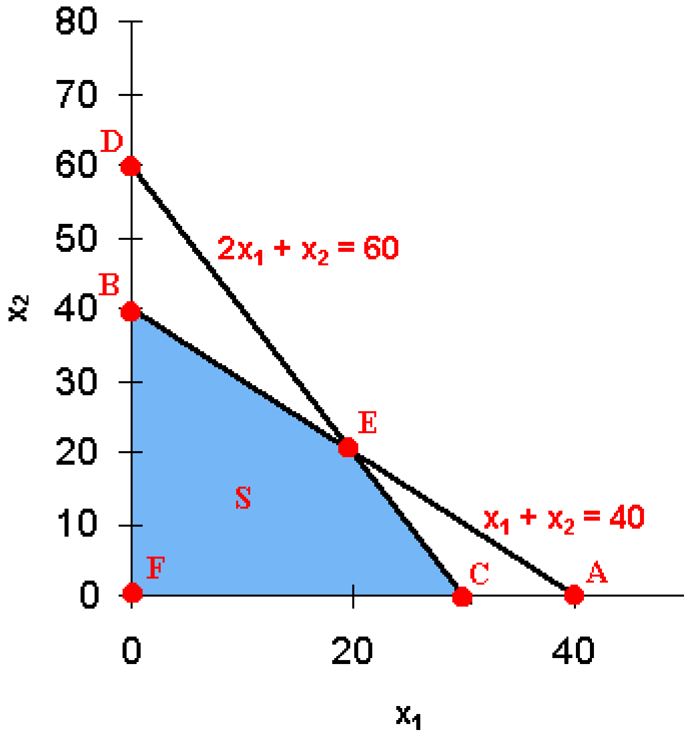
Lineární programování
- charakteristika krajních bodů - příklad

Příklad:

$\max 4x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \leq 40$

$2x_1 + x_2 \leq 60$



Přepis rovnic na standardní tvar:

$$\min \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad*

Příklad:

$\max 4x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \leq 40$

$2x_1 + x_2 \leq 60$

Přepis rovnic na standardní tvar:

$$\min \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad II

Následující tabulka uvádí přehled **bázických proměnných** x_B (zbylé proměnné x_N označujeme jako **nebázické proměnné**), **bázickou matici B** a odpovídající **bázické řešení x**.

Dále je uvedeno, zda je bázické řešení přípustné tj. splňuje $x \geq 0$ (zkratka **BFS** značí **basic feasible solution**).

Nakonec uvádíme, kterým bodům grafu přísluší daná bázická řešení, zda se jedná o krajní body a kterými omezeními jsou body určeny.

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$				

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

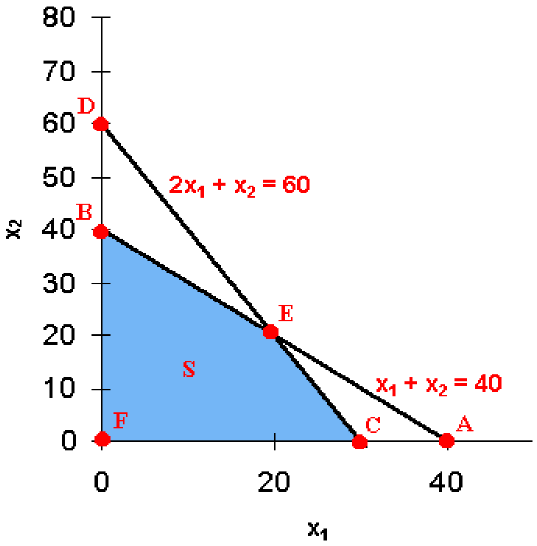
Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ano			

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



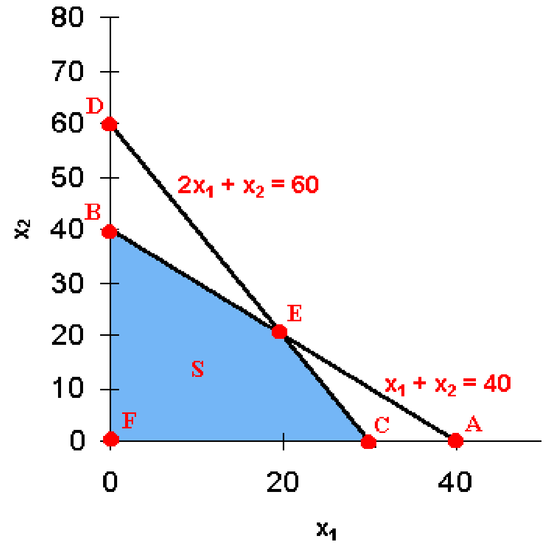
Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \quad 20 \quad 0 \quad 0)$	ano	E		

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



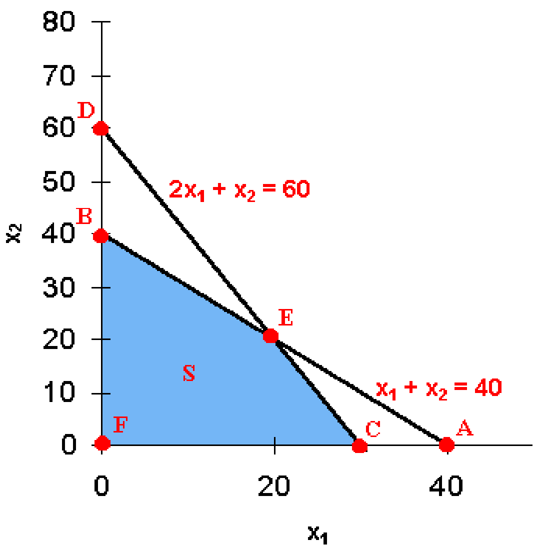
Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ano	E	ano	

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



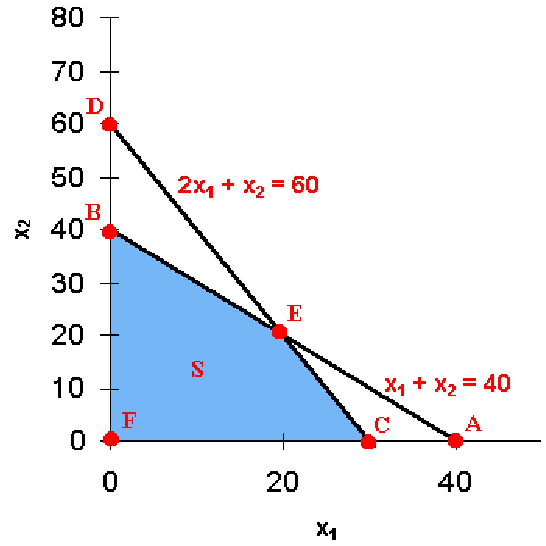
Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1,\ x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ano	E	ano	AEB, CED

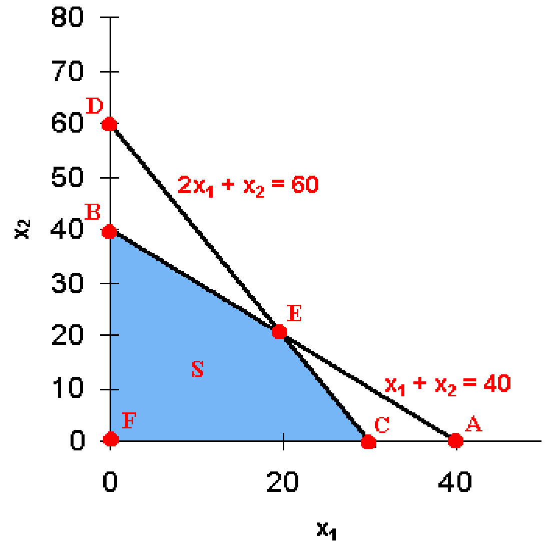
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



Lineární programování
- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ano	E	ano	AEB, CED
x_1, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$					



Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ano	E	ano	AEB, CED
x_1, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	ano	C	ano	CED, ACF
x_1, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ano	E	ano	AEB, CED
x_1, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	ano	C	ano	CED, ACF
x_1, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$	ne	A	ne	ABD, ACF

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad IV*

Tabulka bázických proměnných - 2. část:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_2, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$					
x_2, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$					
x_3, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

Lineární programování

- *charakteristika krajních bodů* - *příklad IV*

Tabulka bázických proměnných - 2. část:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_2, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 60 & -20 & 0 \end{pmatrix}$	ne	D	ne	CED, DBF
x_2, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}$	ano	B	ano	AEB, DBF
x_3, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 60 \end{pmatrix}$	ano	F	ano	DBF, ACF

Lineární programování

- *charakteristika krajních směrů*

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in R^{m \times n}$ a $h(A) = m$.

$d \in R^n$ je krajní směr v $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ po permutaci sloupců matice A (a odpovídajících složek vektoru x) lze matici A vyjádřit jako $A = (B \mid N)$, tak že $B^{-1} .a_j \leq 0$ pro některý sloupec a_j matice N a platí:

$$d = \alpha \begin{pmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{pmatrix}$$

kde $\alpha > 0$ a $e_j = (\varepsilon_{j,1}, \ldots ,\varepsilon_{j,n-m})$ a dále $\varepsilon_{j,j} = 1$ a $\varepsilon_{j,i} = 0$ pro $i \neq j$.

Lineární programování

- *vlastnosti krajních směrů*

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$.

Pak platí:

Množina S má nejvýše $\binom{n}{m}(n-m)$ krajních směrů.

Lineární programování

- *věta o reprezentaci*

Věta o reprezentaci:

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, $A \in R^{m \times n}$ a $h(A) = m$ a nechť $x_1, ..., x_k$ jsou všechny krajní body S a $d_1, ..., d_l$ všechny krajní směry S.

Pak platí $x \in S \Leftrightarrow$

$\exists \lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\exists \mu_i \geq 0$ tak, že:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j$$

Lineární programování
- *základní věta LP*

Základní věta lineárního programování:

Mějme úlohu lineárního programování ve standardním tvaru, $h(A) = m$, $S \neq \emptyset$. Nechť $x_1, \ldots, x_k$ jsou všechny krajní body S a $d_1, \ldots, d_l$ všechny krajní směry S.

Pak existuje $\min\{c^T x;\ x \in S\} \Leftrightarrow$

$c^T d_j \geq 0 \qquad$ pro $\forall j = 1, \ldots, l$

Jestliže existují optimální řešení, pak existuje mezi nimi alespoň jeden krajní bod.

Lineární programování

- *metody nalezení minima*

- Přímá metoda
- Simplexová metoda.

Přímá metoda:

- najdeme všechny krajní body
- spočítáme hodnotu účelové funkce pro tyto body
- má-li úloha optimální řešení, je jím krajní bod s největší hodnotou účelové funkce

Lineární programování
- *přímá metoda*

Problém při této metodě spočívá v tom, že počet krajních bodů s rostoucím počtem proměnných rychle narůstá:

N proměnných => 2^N kandidátů na krajní bod

Vyhledat všechny krajní body znamená vybrat z matice A všechny regulární submatice řádu *m* a vyřešit pro každou z nich soustavu:

$B.x_B = b$

Pokud je její řešení nezáporné, získali jsme (po doplnění nulovými složkami) krajní bod množiny M.

Lineární programování
- *přímá metoda 2*

Takový postup je numericky schůdný jen pro úlohy malé dimenze.

Navíc nemáme předem zaručenou existenci optimálního řešení, takže nalezené nejlepší základní řešení nemusí být řešením optimálním.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip

Prochází krajní body množiny přípustných řešení jistým racionálním způsobem (například nikdy nepřejde do bodu s vyšší funkční hodnotou).

Způsob procházení množiny přípustných řešení lze snadno popsat geometricky:

- Předpokládejme, že máme krajní bod x_0 množiny přípustných řešení M.
- Z tohoto krajního bodu vychází konečné množství hran množiny M, z nichž každá buď obsahuje buď jediný další krajní bod množiny M, nebo je neomezená.

Lineární programování

- *simplexová metoda* - *princip II*

- Jestliže na některé neomezené hraně existuje bod, pro který je hodnota účelové funkce nižší než $c^T x_0$, nemá úloha optimální řešení a postup končí.
- V opačném případě hledáme sousední krajní bod, pro který je hodnota kriteriální funkce nižší než $c^T x_0$.
- Nechť je to krajní bod x_1. Pak stejný postup, který jsme dosud aplikovali na bod x_0, aplikujeme nyní na bod x_1.
- Pokud neexistuje sousední krajní bod s vlastností $c^T x > c^T x_0$, je x_0 hledaným optimálním řešením.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip III

Princip:

$x = (x_B, x_N)$, $x_N = 0$, $x_B \in R^m$, $x_N \in R^{m-n}$

$A = (B \mid N)$, $B \in R^{m \times m}$, $B \in R^{m \times (m-n)}$, B je regulární

Krok metody = výměna jedné nebázové proměnné (z x_N) za bázovou proměnnou (z x_B) tak, aby $c^T x$ kleslo.

Výměna znamená, že tato dosud bázová proměnná pak bude mít hodnotu 0, a ta dosud nebázová nějakou kladnou hodnotu => budeme opět v krajním bodě.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip IV

- Jak vybrat nebázovou proměnnou, kterou přesuneme do báze?

Pomocí redukovaného cenového vektoru :-).

Odvození vztahu pro redukovaný cenový vektor:

=> Vyjádříme $c^T x$ za předpokladu $Ax = b$ pouze pomocí proměnné x_N.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip V

=> Vyjádříme $c^T x$ za předpokladu $Ax = b$ pouze pomocí proměnné x_N.

Platí: $(B \mid N)\,(x_B, x_N)^T = b$

$\Rightarrow B.x_B + N.x_N = b$

$\Rightarrow x_B = B^{-1}.(b - N.x_N)$

$c^T x = c_B^{T.} x_B + c_N^{T.} x_N = c_B^{T.}\, B^{-1}.(b - N.x_N) + c_N^{T}.x_N =$

$= c_B^{T.}\, B^{-1}.b \quad + (c_N - N^T.B^{-T}.c_B)^T.x_N =$

$= \text{konst.} \qquad + d_N$

kde d_N je **redukovaný cenový vektor**

Lineární programování

- simplexová metoda - princip VI

Pokud jsou všechny složky x_B kladné a některá složka (například $d_{N,i}$) vektoru d_N záporná, můžeme snížit hodnotu $c^T x$ tím, že do x_B přesuneme $x_{N,i}$.

Teoreticky můžeme zvolit libovolnou složku $x_{N,i}$ s $d_{N,i} < 0$.

Pokud neexistuje v d_N záporná složka, aktuální bod x je minimem.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip VII

Pokud je zde více než jedna záporná složka, pak v ideálním případě zvolíme tu složku, která vede k největšímu poklesu $c^T x$.

Existuje mnoho heuristik pro výběr vhodné složky. Například Dantzigovo pravidlo:

Zvolte tu složku d_N, která má co největší zápornou hodnotu.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip VIII

Pokud máme vybrán index i složky vektoru x_N, kterou přesuneme do báze, musíme vypočítat hodnotu $x_{N,i}$:

$$x_{N,i} = \min_{j=1\ldots m} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_j}{(B^{-1}N_i)_j} : (B^{-1}N_i)_j > 0 \right\}$$

Pomocí této hodnoty můžeme dopočítat x_B:

$$x_B = B^{-1}.(b - N_i.x_{N,i})$$

Lineární programování

- simplexová metoda - algoritmus

0) Najdi nějaký krajní bod $x = (x_B, x_N)$, $x_N = 0$ a $Ax = b$.

1) Vypočítej redukovaný cenový vektor:

   $d_N = (c_N – N^T.B^{-T}.c_B)^T$

   Pokud $d_N \geq 0$, pak jsme v minimu

   jinak zvol i tak, aby $d_i = \min_k d_k$

2) Vypočítej $x_{N,i}$ a x_B.

3) Pro první j, pro které $x_{B,j} = 0$ vyměň $x_{N,i}$ a $x_{B,j}$.

4) Jdi na 1).

Lineární programování

- simplexová metoda - dvoufázová

ad 0): Pro výběr prvního krajního bodu lze rovněž využít minimalizační algoritmus => tzv. **dvoufázová metoda**.

I) Řešení pomocné úlohy:

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i \quad \text{za předpokladu } r = Ax - b,\ x \geq 0,\ r \geq 0$$

II) Řešení min $c^T x$ za předpokladu $Ax = b$, $x \geq 0$.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka

Při ručním řešení úloh se velmi dobře osvědčuje uspořádání výpočtů do tzv. ***simplexové tabulky***, která obsahuje koeficienty soustavy **m+1** lineárních rovnic ve standardním tvaru o **n+1** neznámých.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka

	f(x)	x_1	x_2	…	x_n	
x_{k1}						
…						
x_{km}						
f(x)						

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka

Do hlavičky simplexové tabulky píšeme označení všech proměnných (první z nich je proměná f(x)).

Do prvního sloupce píšeme označení proměnných, které tvoří v příslušném kroku zkoumaný krajní bod (= tzv. základní řešení).

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II

Do posledního sloupce píšeme pravé strany soustavy lineárních rovnic.

Poslední řádka odpovídá rovnici pro účelovou funkci.

Vstupující proměnné odpovídá v tabulce tzv. **klíčový sloupec**.

Řádek, obsahující vystupující proměnnou, je **klíčový řádek**.

Prvek ležící v průsečíku klíčového řádku a klíčového sloupce nazveme **klíčovým prvkem**.

Lineární programování

- *simplexová metoda* - *praxe* - *iniciace*

Mějme úlohu LP ve standardním tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} . x = f(x)$$

Do simplexové tabulky ji zapíšeme takto:

	$f(x)$	x_1	x_2	...	x_n	
x_{k1}	0	a_{11}	a_{21}	...	a_{1n}	b_1
:	:	:	:		:	:
x_{km}	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
$f(x)$	1	c_1	c_2	...	c_n	0

Lineární programování

- *simplexová metoda* - *praxe* - *výpočet*

Kritérium pro to, zda je řešení optimální, dává řádka f(x). Pokud obsahuje záporné koeficienty, není řešení optimální.

Vstupující proměnná (proměnná, která se přidá do báze) je ta, která má největší zápornou hodnotu v posledním řádku.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II

Vystupující proměnnou určíme tak, že dělíme postupně čísla v posledním sloupci tabulky čísly z klíčového sloupce, pokud jsou tato čísla kladná. Zvolíme tu proměnnou, pro niž vyjde nejmenší hodnota.

V dalším řešení postupujeme takto:

V prvním sloupci nahradíme označení vystupující proměnné označením vstupující proměnné.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II

Prvky v řádku vstupující proměnné dostaneme tak, že dělíme prvky klíčového řádku klíčovým prvkem

Prvky v ostatních řádcích dostaneme tak, že od každého řádku odečteme takový násobek řádu vstupující proměnné, aby v klíčovém sloupci byly nuly (kromě jedničky v řádku vstupující proměnné)

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Nalézt maximum funkce: $f(x) = 4x_1 + 2x_2$

Za podmínek: $-x_1 + 3x_2 \leq 9$; $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$2x_1 - x_2 \leq 10$; $x_1, x_2 \geq 0$

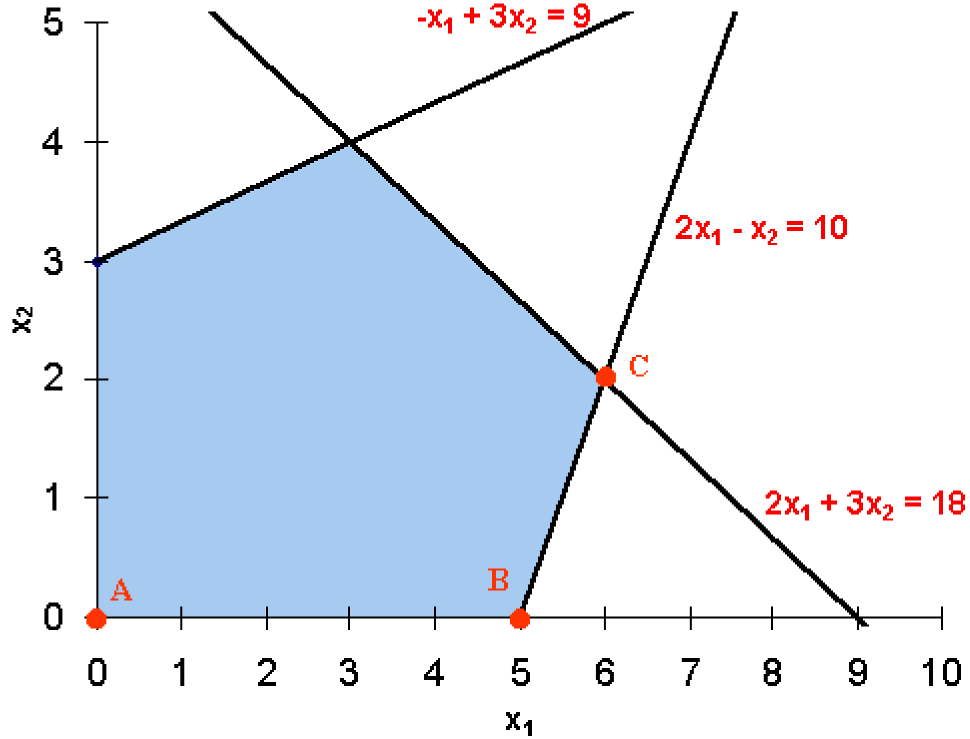
Standardní tvar rovnic:

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$

$f(x) - 4x_1 - 2x_2 = 0$



Lineární programování

- *simplexová metoda* - *praxe* - *příklad*

Standardní tvar rovnic:

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9;$ $\quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 10;$ $\quad f(x) - 4x_1 - 2x_2 = 0$

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

I.	f(x)	**x_1**	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	**-1**	3	1	0	0	9
x_4	0	**2**	3	0	1	0	18
x_5	**0**	**2**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**10**
f(x)	1	**-4**	-2	0	0	0	0

Lineární programování

- *simplexová metoda* - *praxe* - *příklad*

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

I.	f(x)	**x_1**	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	**-1**	3	1	0	0	9
x_4	0	**2**	3	0	1	0	18
x_5	**0**	**2**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**10**
f(x)	1	**-4**	-2	0	0	0	0

Výchozí základní řešení:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 18$, $x_5 = 10$, $f(x) = 0$

Lineární programování

- *simplexová metoda* - *praxe* - *příklad*

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

II.	f(x)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	**5/2**	1	0	1/2	14
x_4	**0**	**0**	**4**	**0**	**1**	**-1**	**8**
x_1	0	1	**-1/2**	0	0	1/2	5
f(x)	1	0	**-4**	0	0	2	20

Výchozí základní řešení:

$x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 14$, $x_4 = 8$, $x_5 = 0$, $f(x) = 20$

Lineární programování

- *simplexová metoda* - *praxe* - *příklad*

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

III.	f(x)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-5/8	9/8	9
x_4	0	0	1	0	1/4	-1/4	2
x_1	0	1	0	0	1/8	3/8	6
f(x)	1	0	0	0	1	1	28

Optimální řešení:

$x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $f(x) = 28$

Cvičeni
- *příklad 1*

Nalezněte krajní body množiny přípustných řešení úlohy:

Nalézt maximum funkce:

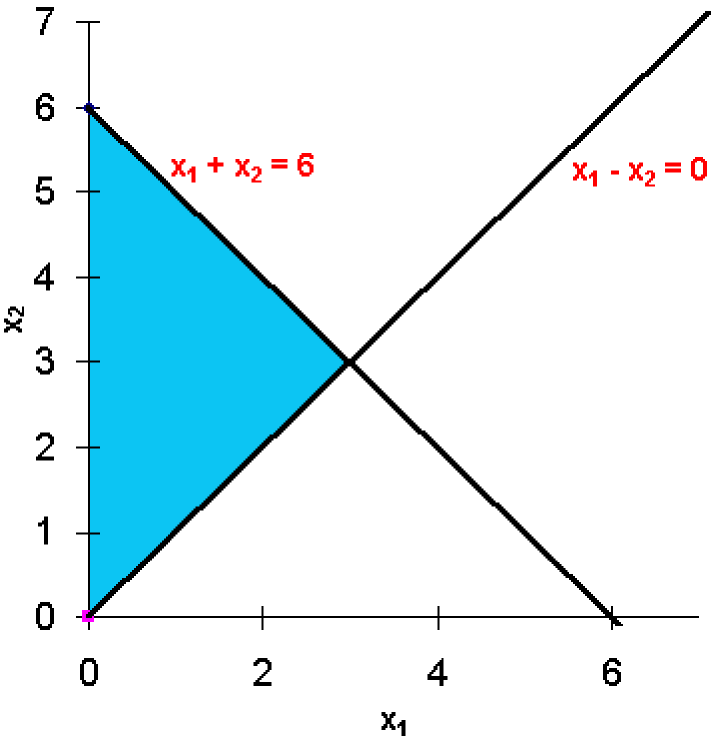
$f(x) = 15x_1 + 2x_2$

Za podmínek:

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \leq 0$

$x_i \geq 0$



Cvičení
- *příklad 2*

Nalézt maximum funkce:

$$f(x) = 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 25x_4$$

Za podmínek:

$$2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 5000$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_4 \geq 6000$$

$$10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \geq 18000$$

$$x_i \geq 0$$