Jméno: Nemotorný Ptakopysk **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [3 body] Řekneme, že výroková formule φ je *férově splnitelná*, pokud se v ní vyskytuje sudý počet výrokových proměnných a je splněná nějakou valuací těchto proměnných, ve které má polovina proměnných hodnotu *true* a druhá polovina hodnotu *false*.

Uvažme problém rozhodnout, zda je daná výroková formule férově splnitelná, tedy problém

$$\textit{FAIR-SAT} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ je férově splnitelná}\}.$$

Dokažte, že *FAIR-SAT* je NP-úplný.

Příslušnost do NP. Problém *FAIR-SAT* je rozhodován např. nedeterministickým Turingovým strojem, který pracuje následovně: stroj nejprve deterministicky ověří, zda vstup je kódem nějaké výrokové formule φ, která má sudý počet výrokových proměnných (to lze jistě učinit v polynomiálním čase). Pokud tomu tak není, ihned zamítne. V opačném případě nedeterministicky vybere nějakou valuaci proměnných z φ tak, aby právě polovina proměnných měla hodnotu *true* a polovina hodnotu *false* (lineární čas vzhledem k počtu proměnných, tedy i vzhledem k velikosti formule). Následně stroj vyhodnotí, zda je formule φ touto valuací splněná. Pokud ano, stroj akceptuje, jinak zamítá. Všechny uvedené operace lze na Turingově stroji implementovat v polynomiálním čase, tedy uvedený stroj má polynomiální časovou složitost.

NP-těžkost. Ukážeme, že $\textit{SAT} \leq_p \textit{FAIR-SAT}$. Uvažme funkci f, která je pro vstupní řetězec w definována takto: pokud w není kódem výrokové formule, pak $f(w) = w$. V opačném případě označme φ výrokovou formuli zakódovanou řetězcem w a dále nechť n značí počet výrokových proměnných ve φ. Definujeme

$$f(w) = \langle\varphi \wedge \psi\rangle, \text{ kde } \psi = (x_1 \vee \neg x_1) \wedge (x_2 \vee \neg x_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \vee \neg x_n)$$

a $x_1, \ldots, x_n$ jsou proměnné, které se nevyskytují ve φ. Všimněme si, že formule zakódovaná v $f(w)$ má $2n$ proměnných a její část ψ je splněná každou valuací proměnných. Funkce f je vyčíslitelná deterministickým strojem s polynomiální časovou složitostí: stroj nejprve zkontroluje, zda vstup je kódem formule, a pokud ano, spočítá výrokové proměnné ve φ, vygeneruje formuli ψ, jejíž velikost je $\mathcal{O}(|\varphi|)$, a na výstup dá zakódovanou konjunkci $\varphi \wedge \psi$.

Zbývá ukázat, že $w \in \textit{SAT} \Leftrightarrow f(w) \in \textit{FAIR-SAT}$. Tato ekvivalence zřejmě platí pro w, která nejsou kódy výrokových formulí, protože pak $w \notin \textit{SAT}$ a $f(w) = w \notin \textit{FAIR-SAT}$. Ve zbytku důkazu tedy předpokládejme, že $w = \langle\varphi\rangle$, kde φ je výroková formule, a označme n počet výrokových proměnných ve φ.

"$\Rightarrow$" Nechť $\langle\varphi\rangle \in \textit{SAT}$, tedy existuje valuace ν splňující φ. Nechť $m \leq n$ je počet proměnných z φ, které tato valuace zobrazí na *true*. Nyní zadefinujeme valuaci ν' takto: pro každou proměnnou y, která se vyskytuje ve φ, položíme $\nu'(y) = \nu(y)$ a dále pak $\nu'(x_1) = \nu'(x_2) = \ldots = \nu'(x_m) = \textit{false}$ a $\nu'(x_{m+1}) = \ldots = \nu'(x_n) = \textit{true}$. Valuace ν' splňuje formuli $\varphi \wedge \psi$ a zobrazuje právě $m + (n - m) = n$ proměnných z této formule na *true* a zbývajících n proměnných na *false*. Tedy $f(\langle\varphi\rangle) = \langle\varphi \wedge \psi\rangle \in \textit{FAIR-SAT}$.

"$\Leftarrow$" Nechť $f(\langle\varphi\rangle) = \langle\varphi \wedge \psi\rangle \in \textit{FAIR-SAT}$. Pak existuje valuace, která (mimo další požadavky) splňuje formuli $\varphi \wedge \psi$. Z toho okamžitě plyne, že formule φ je splnitelná. Tedy $\langle\varphi\rangle \in \textit{SAT}$.