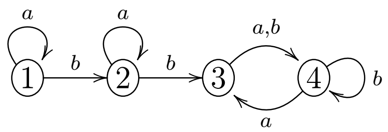
Algebra I – podzim 2017 – vzor písemky

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda … je pologrupa/monoid/grupa/okruh/obor integrity/těleso.
(*například* Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je operace definovaná předpisem $a * b = a + b - ab$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$, je pologrupa a zda je to grupa.)
nebo
Rozhodněte, zda … je podpologrupa/podmonoid/podgrupa/normální podgrupa/podokruh/ideál v … .

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu … .
(*automat může být například*



)

3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$.
například

$$(G, \cdot) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{R} \right\}, \cdot \right)$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b\mathrm{i} & c & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \{-1, 1\},\ b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla … nad $\mathbb{Q}$.
(*číslo může být například* $1 + \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \mathrm{i}$, $\sqrt{3} + \sqrt[3]{\sqrt{3} + 3}$, $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 3$)

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\cdots}$ bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.
(*číslo může být například* $\frac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$, kde α splňuje $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha = -2$)

6. **– 7. (2×10 bodů)** Dejte příklad pologrupy/grupy/okruhu/homomorfismu daných vlastností.
(*například* grupy, která obsahuje prvky všech řádů *nebo* nekonečné grupy a její podgrupy indexu 10)

8. **(5 bodů)** Definujte … .

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení … .

10. **(10 bodů)** Dokažte … .

V příkladech 8. – 10. se může vyskytnout pouze to, co se probíralo na přednášce.