

# Od modálních logik k TILu. Vícehodnotové logiky

Luboš Popelínský

E-mail: [popel@fi.muni.cz](mailto:popel@fi.muni.cz)  
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

Obsah:

- Klasické a neklasické logiky
- Intenzionální logiky. Modální logika
- Temporální a jiné modality
- Transparentní intenzionální logika. Začínáme
- Vícehodnotová logika

# Klasické a neklasické logiky

Už od Aristotela se logika řídí dvěma základními logickými principy<sup>1</sup>

- principem extenzionality
- principem dvouhodnotovosti.

**princip extenzionality** : pracujeme vyhradně s pravdivostními hodnotami tvrzení a nikoliv s jejich obsahem. Tedy, logika pracuje pouze s oznamovacími větami a na těchto větách jí nezajímá, o čem tyto věty jsou, nýbrž vyhradně a pouze to, jaká je jejich pravdivostní hodnota, tj. zda se jedná o pravdivá či nepravdivá tvrzení. Přesněji to znamená, že logické spojky fungují jako funkce z množiny pravdivostních hodnot do množiny pravdivostních hodnot, tj., že pravdivostním hodnotám částí složeného výroku přiřadí výslednou pravdivostní hodnotu (celého složeného výroku).

---

<sup>1</sup>Projekt ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

# Úvodem k intenzionálním logikám. Módy pravdy

Cavaco Silva je presidentem Portugalska.

Jana čte.

Sluneční soustava má devět planet. (Nebo osm?)

Třetí odmocnina z 27 jsou 3.

nutně pravda, i v budoucnu. Ale:

Jana **ví**, že třetí odmocnina z 27 jsou 3.

Jan **nevěří**, že třetí odmocnina z 27 jsou 3.

**Verifikace programů**: nejen různé světy, ale i různé budoucnosti

**VŽDY** pravda, **NĚKDY** pravda, **VÍM** že, **VĚŘÍM** že, ...

# Modální logika

$\Box\phi$  - "nutně platí  $\phi$ ", " $\phi$  je vždy pravda"

$\Diamond\phi$  - "možná platí  $\phi$ ", " $\phi$  je někdy pravda"

**K-logika**  $K \equiv$  Kripke, nejobecnější, tj. s minimálními omezeními pro  $\Box$   
resp.  $\Diamond$

Je-li  $\mathcal{L}$  jazyk predikátové logiky, rozšíříme ho na **modální jazyk**  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$   
přidáním dvou symbolů  $\Box$  and  $\Diamond$  do abecedy a **do definice syntaxe přidáme**

Je-li  $\phi$  formule, pak také  $(\Box\phi)$  a  $(\Diamond\phi)$  jsou formule.

Sémantika: **Kripkeho rámce**, tj. Kripkeho interpretace

# Sémantika modální logiky

Kripkeho interpretace (též rámeček)  $C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$

$W$  ... množina světů

$S$  ... relace přístupu/dostupnosti (accessibility)

$C(p)$  ... logika, např. výroková,  $C(p)$  pro  $\mathcal{L}$  v každém světě  $p \in W$

$C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$  je Kripkeho rámeček pro jazyk  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{L}$ -frame) jestliže pro každé světy  $p$  a  $q$  z  $W$ ,  $pSq$  implikuje, že  $C(p) \subseteq C(q)$  a interpretace konstant v  $\mathcal{L}$  ( $p$ )  $\subseteq$   $\mathcal{L}$  ( $q$ ) je stejná v  $C(p)$  i v  $C(q)$ .

# Sémantika modální logiky

Nechť  $C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$  je Kripkeho rámec pro jazyk  $\mathcal{L}$ ,  $p \in W$  a  $\phi$  je formule jazyka  $\mathcal{L}$  ( $p$ ). **Formule  $\phi$  platí ve světě  $p$**  (angl.  $p$  forces  $\phi$ ), píšeme  $p \Vdash \phi$ , jestliže

1. pro atomickou formuli  $\phi$ ,  $p \Vdash \phi \Leftrightarrow \phi$  je pravdivá v  $C(p)$ .
2.  $p \Vdash (\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow p \Vdash \phi$  implikuje  $p \Vdash \psi$ . Podobně pro ostatní logické spojky a  $\forall, \exists$
3.  $p \Vdash \Box\phi \Leftrightarrow$  pro všechny světy  $q \in W$  takové, že  $pSq$  <sup>2</sup>  $q \Vdash \phi$ .
4.  $p \Vdash \Diamond\phi \Leftrightarrow$  existuje  $q \in W$   $pSq$  a  $q \Vdash \phi$ .

Formule  $\phi$  je **pravdivá v Kripkeho rámci (interpretaci)  $C$** , jestliže pro každý svět  $p \in W$   $\phi$  platí ve světě  $p$ , píšeme  $\Vdash_C \phi$ . Formule  $\phi$  je **tautologie**, jestliže platí ve všech interpretacích Kripkeho.

---

<sup>2</sup>svět  $q$  je přístuný ze světa  $p$

## Tautologie ... ?

axiom	jméno	vlastnost relace $R$
$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$	$K$	žádné požadavky
$\Box A \rightarrow \Diamond A$	$D$	$\exists u(wRu)$
$\Box A \rightarrow A$	$M$	$wRw$
$\Box A \rightarrow \Box \Box A$	$4$	$(wRv \wedge vRu) \Rightarrow wRu$
$A \rightarrow \Box \Diamond A$	$B$	$wRv \Rightarrow vRw$
$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	$5$	$(wRv \wedge wRu) \Rightarrow vRu$

viz David Pelikán, Vzájemná srovnání axiomatických systémů modálních logik, DP FFUK Praha 2007

# Temporální a jiné modality

od modalit "nutně", "možná" celkem přirozeně k modalitám **temporálním** "někdy/vždycky v minulosti/budoucnosti" viz např.

[https://www.fi.muni.cz/~popel/lectures/bak\\_logika/non-classical-logics/modal-logic.pdf](https://www.fi.muni.cz/~popel/lectures/bak_logika/non-classical-logics/modal-logic.pdf)

## Deontické modality

Op ..... Je přikázáno p (z anglického ordered = přikázáno)

Fp ..... Je zakázáno p (z anglického forbidden = zakázáno)

Pp ..... Je povoleno p (z anglického permitted = povoleno)

dosavadní modality - alethické (nutnost, možnost), temporální i deontické : v jistém smyslu absolutní a všeobecně platné, **epistemické modality** jsou "relativní":

Kxp ..... x ví, že platí p (z angl. know = vědět)

Uxp ..... x neví, že platí p (z unknown = neznámé)

Bxp ..... x věří, že platí p (z believe = věřit)



# Nedostatečná expresivita predikátové logiky. Příklady

1. Červená barva je krásnější než modrá. Kostka je červená.  
 individuum(červená barva) vs. vlastnost (je červená)  
 nelze vyjádřit např. jejich rovnost
2. Varšava je hlavní město Polska.  
 Varšava - jméno individua  
 hlavní město Polska - individuová role  
 - závisí na světě a čase  
 - význam "býti hlavním městem" na světě a čase nezávisí
3. Číslo X je větší než číslo Y. vs. Otec je větší než syn.  
 matematické "větší než", relace, pevně dané. vs.  
 empirické : vztah dvou individuí, který se může měnot v čase
4. ano vs. V Brně prší.  
 ano = pravdivostní hodnota true vs. propozice označuje pravdivostní hodnotu, která se mění v čase.  
 I když pravdivostní hodnota někdy závisí na světě a čase, samotný význam na nich nezávisí

# Problém substituce

Problém substituce :  $a = b; C(x/a) \vdash C(x/b)$

*Prezident ČR je manžel Livie.*

*Prezident ČR je ekonom.*

⊢

*Manžel Livie je ekonom.*

*Ale:*

*Prezident ČR je manžel Livie.*

*Miloš Zeman chce být prezident ČR.*

⊢

*Miloš Zeman chce být manželem Livie.*

# Richard Montague vs. Pavel Tichý

Montague : přirozený jazyk nespĺňuje princip kompozicionality (Frege) , protože se skládá z mnoha tzv. nepoddajnych vyrazů.

nepoddajný = význam vyrazu daného jazyka často závisí na něčem, co nebylo pojmenováno. Viz

*Karel myslí na prezidenta České republiky.*

*Karel myslí na manžela Livie Klausové.* <sup>3</sup>

Cvičení: zkusme vyhodnotit: (i) v roce (světě) 2020 (ii) v roce 2009: ?

Montague : denotátem (nebo referencí) vyrazu prezident ČR jeho extenze,( hodnota v aktuálním světě a čase,) osoba Václava Klause, stejně tak : Václav Klaus denotátem vyrazu manžel Livie Klausové. **Nicméně reference obou vět již shodné nejsou,** Karel může myslet na prezidenta ČR, aniž by myslel na manžela Livie Klausové. Tuto neshodu Montague vidí a připisuje ji tím, že dané vyrazy jsou nepoddajné a dále neřeší.

---

<sup>3</sup>Daniel Balík, Montaguova logika ve srovnání s Transparentní intenzionální logikou, DP FF MU2009

# Transparentní intezionální logika

*Karel myslí na prezidenta České republiky.  
Karel myslí na manžela Livie Klausové.*

(Podle TIL) příklad neříká nic o tom, že Karel myslí na Václava Klause, denotátem vyrazu prezident ČR není Václav Klaus.

Denotátem tohoto vyrazu je **individuová role, intenze**. Václav Klaus je nahodily držitel této role v aktuálním světě a čase, je **referencí**

# Jednoduchý ? příklad

viz příklad na str.16

[Introduction to Pavel Tichy and Transparent Intensional Logic](#)

v interaktivní osnově

# Extenze a intenze

Definujeme

- **intenze** – objekty typu funkcí, jejichž hodnoty závisí na světě a čase
- **extenze** – ostatní objekty (na světě a čase nezávislé)

časté extenze a intenze:

extenze	intenze
individua	individuové role
třídy	vlastnosti
relace	vztahy
pravdivostní hodnoty	propozice
funkce	empirické funkce
čísla	veličiny

# Logická analýza přirozeného jazyka

**logická analýza PJ** – analýza **významu** výrazů (vět) PJ  
přirozený **jazyk** (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

**pojem** – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

# Logická analýza přirozeného jazyka

**logická analýza PJ** – analýza **významu** výrazů (vět) PJ  
přirozený **jazyk** (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

**pojem** – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

– **pojem**  $\neq$  **výraz** – např. výrazy v různých jazycích často reprezentují stejný pojem (**pojem**(“prvočíslo”)  $\equiv$  **pojem**(“prime number”))



# Logická analýza přirozeného jazyka

**logická analýza PJ** – analýza **významu** výrazů (vět) PJ  
přirozený **jazyk** (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

**pojem** – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

- **pojem**  $\neq$  **výraz** – např. výrazy v různých jazycích často reprezentují stejný pojem (**pojem**(“prvočíslo”)  $\equiv$  **pojem**(“prime number”))
- **pojem**  $\neq$  **představa** – představa je *subjektivní*, pojem je **objektivní**

# Logická analýza přirozeného jazyka

**logická analýza PJ** – analýza významu výrazů (vět) PJ  
 přirozený jazyk (čeština, angličtina, ...) = nástroj pojmového uchopení reality

**pojem** – kritéria/procedury umožňující identifikovat různé konkrétní a abstraktní objekty (např. “planeta” – třída nebeských těles s určitými charakteristikami – obíhá po oběžné dráze kolem slunce, není zdrojem světla, ...)

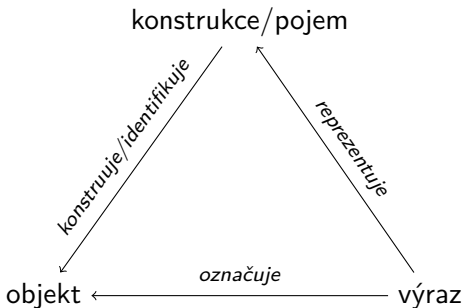
- **pojem**  $\neq$  **výraz** – např. výrazy v různých jazycích často reprezentují stejný pojem (**pojem**(“prvočíslo”)  $\equiv$  **pojem**(“prime number”))
- **pojem**  $\neq$  **představa** – představa je *subjektivní*, pojem je **objektivní**
- pojmy mohou identifikovat různé objekty:
  - jedno individuum – **individuální pojmy** (např. **Petr**, **Pegas**, **prezident ČR**)
  - třídu objektů – **vlastnost** (např. **červený**, **šelma**, **hora**)
  - *n*-člennou relaci – **vztah** (např. **otec (někoho)**, **křivdit (někdo někomu)**)
  - pravdivostní hodnotu – **propozice** (např. **v Brně prší**)
  - funkcionální přiřazení – **empirické funkce** (např. **rychlost**)
  - číslo – (fyzikální) **veličiny** (např. **rychlost světla**)

# Vztah pojmu a výrazu

ve zjednodušené podobě: **pojmem** odpovídá logické **konstrukci**

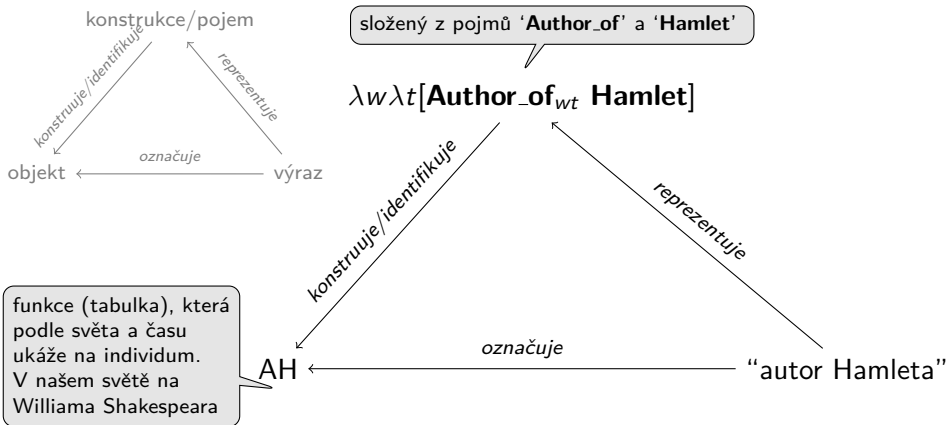
# Vztah pojmu a výrazu

ve zjednodušené podobě: **pojem** odpovídá logické **konstrukci**



# Vztah pojmu a výrazu

ve zjednodušené podobě: **pojem** odpovídá logické **konstrukci**



# Pavel Tichý

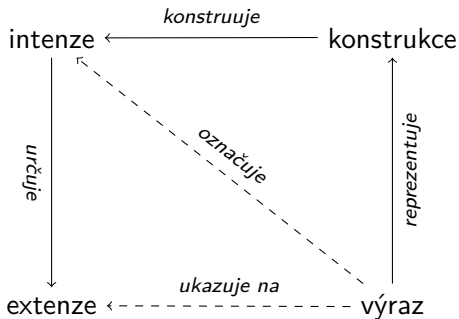
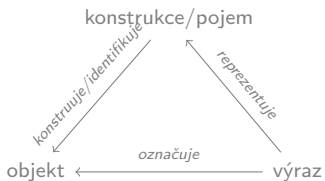
- a) logickou analýzou nemůže být překlad výrazu NL (NLE), měl by spíše **pojmenovat** vše, co je vyjádřeno výrazem
- b) logická analýza nemůže najít více skutečností než těch, která jsou skutečně uvedené ve větě / výrazu NL jsou přiřazené **a priori**.

*Pavel Tichý, The Foundations of Frege's Logic, de Gruyter, Berlin, New York, 1988.*

# Transparentní intenzionální logika

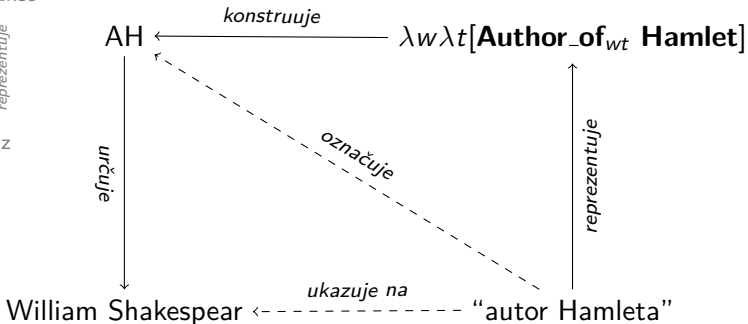
- **Transparent Intensional Logic, TIL**
- **logický systém** speciálně navržený pro zachycení **významu výrazů PJ**, autor **Pavel Tichý**
- Tichý vychází z myšlenek – *Gottlob Frege* (1848 – 1925, logik) a *Alonzo Church* (1903 – 1995, teorie typů)
- obdobná teorie – *Montagueho intenzionální logika* – Tichý ukazuje její nedostatky
- vlastnosti:
  - rozvětvená **typová hierarchie** (s typy **vyšších řádů**)
  - **temporální**
  - **intenzionální** (intenze × extenze)
- **transparentost**:
  1. nositel významu (**konstrukce**) není prvek formálního aparátu, tento aparát pouze *studuje* konstrukce
  2. zachycení intenzionality je přesně popsáno z matematického hlediska

## Rozšířený vztah výrazu a významu u intenzí





## Rozšířený vztah výrazu a významu u intenzí



# Základní typy TILu

umožňují přiřadit typ objektům z **intenzionální báze** jazyka – třída **základních vlastností** (barvy, rozměry, postoje, ...) popisujících stav světa

- **o** (omikron, o) ... **pravdivostní hodnoty** Pravda (*true*, T) a Nepravda (*false*, F)  
přesně odpovídají běžným logikám, typy **logických operátorů** – (*oo*), (*ooo*)
- **l** (jota) ... třída **individuí**  
individua ovšem ne jako kompletní objekty, ale jako **numerická identifikace** nestrukturované entity
- **τ** (tau) ... třída **časových okamžiků** (jako časového kontinua)  
zachycení závislosti na čase; současně třída **reálných čísel**
- **ω** (omega) ... třída **možných světů**  
zachycení empirické závislosti na stavu světa

# Typy v TILu

## typ objektu:

- základní typy – **typová báze** =  $\{o, \iota, \tau, \omega\}$
- funkcionální typy – **funkce** nad typovou bází  
 např.  $\iota, ((\iota\tau)\omega), (o\iota), (((o\iota)\tau)\omega), ((o\tau)\omega), \dots$   
 $((\alpha\tau)\omega) \dots$  závislost na světě a čase, vyjadřuje **intenze** – zápis  $\alpha_{\tau\omega}$
- typy **vyšších řádů** – obsahují i třídy konstrukcí řádu  $n - *_n$

# Možné světy

termín **možný svět** – Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716, filozof a matematik)

- $\forall$  možný svět je:
- soubor **myslitelných faktů**
  - je **konzistentní** a **maximální** ze všech takových souborů
  - je **objektivní** (nezávislý na individuálním názoru)

mezi možnými světy  $\exists$  právě jeden **aktuální svět** – jeho znalost  $\equiv$  vševědoucnost

# Možné světy

termín **možný svět** – Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716, filozof a matematik)

$\forall$  možný svět je:

- soubor **myslitelných faktů**
- je **konzistentní** a **maximální** ze všech takových souborů
- je **objektivní** (nezávislý na individuálním názoru)

mezi možnými světy  $\exists$  právě jeden **aktuální svět** – jeho znalost  $\equiv$  vševědoucnost

**možný svět v TILu** = **rozhodovací systém**, pro  $\forall$  prvek intenzionální báze obsahuje **konzistentní přiřazení hodnot**

# Možné světy

termín **možný svět** – Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716, filozof a matematik)

- $\forall$  možný svět je:
- soubor **myslitelných faktů**
  - je **konzistentní** a **maximální** ze všech takových souborů
  - je **objektivní** (nezávislý na individuálním názoru)

mezi možnými světy  $\exists$  právě jeden **aktuální svět** – jeho znalost  $\equiv$  vševědoucnost

**možný svět v TILu** = **rozhodovací systém**, pro  $\forall$  prvek intenzionální báze obsahuje **konzistentní přiřazení hodnot**

příklad – realita s **2 objekty** a **2 vlastnostmi** (9 možných světů  $w_1, \dots, w_9$ ):

být hubený	být tlustý			
	{Laurel, Hardy}	{Laurel}	{Hardy}	$\emptyset$
{Laurel, Hardy}	×	×	×	$w_1$
{Laurel}	×	×	$w_2$	$w_3$
{Hardy}	×	$w_4$	×	$w_5$
$\emptyset$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$

## Princip intenzí v TILu

být hubený	... objekt typu $(ol)_{\tau\omega}$ , funkce z možných světů a času do tříd individuí
$w$	... proměnná typu $\omega$ , možný svět
$t$	... proměnná typu $\tau$ , časový okamžik
<b>[být hubený <math>w t</math>]</b>	... konstruuje $(ol)$ -objekt, třídu individuí, kteří mají ve světě $w$ a čase $t$ vlastnost <b>být hubený</b> (značíme <b>být hubený</b> <sub><math>wt</math></sub> )

## Princip intenzí v TILu

být hubený ... objekt typu  $(ol)_{\tau\omega}$ , funkce z možných světů a času do tříd individuí

$w$  ... proměnná typu  $\omega$ , možný svět

$t$  ... proměnná typu  $\tau$ , časový okamžik

---

[být hubený  $w t$ ] ... konstruuje  $(ol)$ -objekt, třídu individuí, kteří mají ve světě  $w$  a čase  $t$  vlastnost **být hubený** (značíme **být hubený** <sub>$w t$</sub> )

pokud aplikujeme  
jen  $w$  – získáme  
chronologii

**Americký prezident** <sub>$w_{act}$</sub>  (zkr. **P** <sub>$w_{act}$</sub> ) ...  $l_{\tau}$  **P** <sub>$w_{act} t_0 \dots l$</sub> :

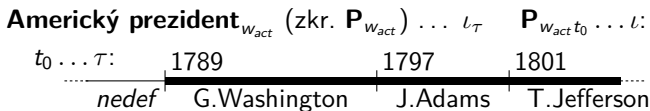
$t_0 \dots \tau$ :	1789	1797	1801	.....
<i>ndef</i>	G.Washington	J.Adams	T.Jefferson	.....



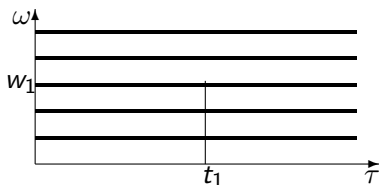
# Princip intenzí v TILu

být hubený	... objekt typu $(ol)_{\tau\omega}$ , funkce z možných světů a času do tříd individuí
$w$	... proměnná typu $\omega$ , možný svět
$t$	... proměnná typu $\tau$ , časový okamžik
<b>[být hubený <math>w t</math>]</b>	... konstruuje $(ol)$ -objekt, třídu individuí, kteří mají ve světě $w$ a čase $t$ vlastnost <b>být hubený</b> (značíme <b>být hubený</b> <sub><math>w t</math></sub> )

pokud aplikujeme jen  $w$  – získáme **chronologii**



**intenzionální sestup** –  
identifikace extenze pomocí intenze, světa  $w_1$  a času  $t_1$



## Nejčastější typy

<i>extenze</i>			<i>intenze</i>		
individua	...	$\iota$	individuové role	...	$\iota_{\mathcal{T}\omega}$
třídy	...	$(o\iota)$	vlastnosti	...	$(o\iota)_{\mathcal{T}\omega}$
relace	...	$(o\alpha\beta)$	vztahy	...	$(o\alpha\beta)_{\mathcal{T}\omega}$
pravdivostní hodnoty	...	$o$	propozice	...	$o_{\mathcal{T}\omega}, \pi$
funkce	...	$(\alpha\beta)$	empirické funkce	...	$(\alpha\beta)_{\mathcal{T}\omega}$
čísla	...	$\tau$	veličiny	...	$\tau_{\mathcal{T}\omega}$

# Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

*Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.*

$$\lambda w \lambda t \left[ \text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[ \lambda w \lambda t \left[ \text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 \left[ \lambda w \lambda t \left[ \text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Země} \right] \right] \right] \right] \right]$$

## Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

*Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.*

$$\lambda w \lambda t [\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 [\lambda w \lambda t [\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 [\lambda w \lambda t [\text{k} \text{u} \text{l} \text{á} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě}]]]]]]$$

- existence neexistujícího

*Pes existuje. Jednorozec neexistuje.*

v PL1:  $\exists x(x = \text{pes})$        $\neg \exists x(x = \text{jednorozec})$

## Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

*Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.*

$$\lambda w \lambda t [\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 [\lambda w \lambda t [\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 [\lambda w \lambda t [\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě}]]]]]]$$

- existence neexistujícího

*Pes existuje. Jednorožec neexistuje.*

v PL1:  $\exists x(x = \text{pes}) \quad \neg \exists x(x = \text{jednorožec})$   
 $(\text{jednorožec} = \text{jednorožec}) \Rightarrow (\exists x(x = \text{jednorožec}))$

## Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

*Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.*

$$\lambda w \lambda t [\text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 [\lambda w \lambda t [\text{v} \text{ě} \text{ř} \text{í}_{wt} \text{Tom}^0 [\lambda w \lambda t [\text{k} \text{u} \text{l} \text{a} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě}]]]]]]$$

- existence neexistujícího

*Pes existuje. Jednorožec neexistuje.*

v PL1:  ~~$\exists x(x = \text{pes})$~~        ~~$\neg \exists x(x = \text{jednorožec})$~~   
 (jednorožec = jednorožec)  $\Rightarrow$  ( $\exists x(x = \text{jednorožec})$ )

## Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

*Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.*

$$\lambda w \lambda t \left[ \text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[ \lambda w \lambda t \left[ \text{v} \text{ě} \text{ř} \text{i}_{wt} \text{Tom}^0 \left[ \lambda w \lambda t \left[ \text{k} \text{u} \text{l} \text{á} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě} \right] \right] \right] \right] \right]$$

- existence neexistujícího

*Pes existuje. Jednorožec neexistuje.*

v PL1:  ~~$\exists x(x = \text{pes})$~~        ~~$\neg \exists x(x = \text{jednorožec})$~~   
 (jednorožec = jednorožec)  $\Rightarrow$  ( $\exists x(x = \text{jednorožec})$ )

v TILu: (\*)  $\lambda w \lambda t \left[ {}^0 \neg [E_{xwt} \text{jednorožec}] \right]$   
 $E_x \stackrel{df}{=} \lambda w \lambda t \lambda p \left[ {}^0 \sum_{\iota} [\lambda x [p_{wt} x]] \right], \quad E_x \dots (o(o\iota)_{\tau\omega})_{\tau\omega}$   
 (\*) ... "třída všech individuí s vlastností 'být jednorožcem' je v daném světě a čase prázdná."

## Příklady přínosu TILu

- propoziční postoje

*Petr říká, že Tom věří, že Země je kulatá.*

$$\lambda w \lambda t \left[ \text{ř} \text{í} \text{k} \text{á}_{wt} \text{Petr}^0 \left[ \lambda w \lambda t \left[ \text{v} \text{ě} \text{ř} \text{i}_{wt} \text{Tom}^0 \left[ \lambda w \lambda t \left[ \text{k} \text{u} \text{l} \text{á} \text{t} \text{á}_{wt} \text{Zem} \text{ě} \right] \right] \right] \right] \right]$$

- existence neexistujícího

*Pes existuje. Jednorožec neexistuje.*

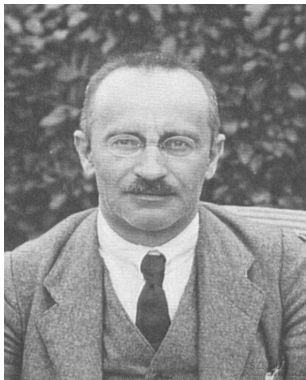
v PL1:  ~~$\exists x(x = \text{pes})$~~        ~~$\neg \exists x(x = \text{jednorožec})$~~   
 (jednorožec = jednorožec)  $\Rightarrow$  ( $\exists x(x = \text{jednorožec})$ )

v TILu: (\*)  $\lambda w \lambda t \left[ {}^0 \neg [E_{x_{wt}} \text{jednorožec}] \right]$   
 $E_x \stackrel{df}{=} \lambda w \lambda t \lambda p \left[ {}^0 \sum_{\iota} [\lambda x [p_{wt} x]] \right], \quad E_x \dots (o(o\iota)_{\tau\omega})_{\tau\omega}$   
 (\*) ... "třída všech individuí s vlastností 'být jednorožcem' je v daném světě a čase prázdná."

- intenzionalita, vlastnosti vlastností, analýza epizod, analýza gramatického času, ...



# Vícehodnotová logika



# Od dvouhodnotové k tříhodnotové logice

nepravda (0) - pravda (1)

nepravda (0) - nevím (1/2) - pravda (1)

zavedeme funkci  $val(A) = \text{pravdivostní hodnota formule } A$

např.  $I(p) = 1, I(q) = 0$ , pak např.  $val(p) = 1, val(\neg p) = 0,$   
 $val(p \wedge q) = 0, val(p \Rightarrow q) = 0$

Pak, v souhlasu se sémantikou logických spojek, jistě platí

$val(\neg A) = 1 - val(A), val(A \wedge B) = \min(val(A), val(B),$   
 $val(A \vee B) = \max(val(A), val(B)$

(pro další spojky je možno spočítat z těchto tří)

## Trojhodnotová Łukasiewiczova logika

zobecníme funkci  $val()$  pro tříhodnotovou logiku. A jsme tam ... ?

Neplatí např. princip vyloučení třetího. Jistě.

Potíž: jen velmi málo tautologií v takové logice najdeme.

Zkusme nadefinovat jinak implikaci

$p/q$	$\neg p \vee q$			nová definice		
0	0	1/2	1	0	1/2	1
1/2	1	1	1	1	1	1
1	1/2	1/2	1	1/2	1	1
	0	1/2	1	0	1/2	1

$$val(p \Rightarrow q) = \min(1, 1 - val(p) + val(q))$$

# K sémantice Łukasiewiczovy logiky

Opět pracujeme s pojmem **interpretace**, tj. přiřazením pravdivostních hodnot z  $\{0, 1/2, 1\}$  výrokovým symbolům

**Model formule**  $\phi$  je taková interpretace, kdy  $val(\phi) > 0$

**Formule**  $\phi$  **sémanticky vyplývá z množiny premis**  $\Phi$ ,  $\Phi \models \phi$ , jestliže pro každou interpretaci  $I$   $val(\Phi) \leq val(\phi)$

Cvičení: dokažte, že pokud  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ , pak  $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \Rightarrow \phi$ .

# Fuzzy logika. Lotfi Zadeh

vychází z fuzzy množin, kdy příslušnost do množiny je z intervalu  $[0, 1]$  a fuzzy relací.

Příklad: množina "být mladý"

stejná funkce  $val()$ , jen nepracujeme s diskrétní doménou  $\{0, 1/2, 1\}$  ale intervalem  $[0, 1]$

dále analogicky jako pro trojhodnotovou logiku

# Víme a známe

- co jsou modální logiky
- modality "nutně", "možná"
- jiné modality a temporální logiky
- a něco k tomu z těch nejobecnějších intenzionálních logik
- především nástin Tichého TILu
- tříhodnotové a fuzzy logiky

# Informační zdroje

Non-monotonic logic, viz Logic for Applications

Stanford Encyclopedia of Philosophy, un peut updated <https://Stanford Encyclopedia of Philosophy, un peut updated/plato.stanford.edu/entries/logic-ai/>

JELIA: European Conference on Logics in Artificial Intelligence. last issue 2019

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-19570-0>