Diskrétní matematika – cvičení 12. a 13. týden

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2020

Příklad

Najděte explicitní vyjádření pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti $\{a_n\}$ defiované rekurentním vztahem

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

Příklad

Najděte explicitní vyjádření pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti $\{a_n\}$ defiované rekurentním vztahem

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

Řešení

Doplňme $a_{-1} = a_{-2} = 0$ a rozepišme druhou rovnici pro případ $n = 1$, $n = 0$:

$$n = 1\colon a_1 = a_0 + a_{-1} + A$$
$$n = 0\colon a_0 = a_{-1} + a_{-2} + B$$

Dohromady tak můžeme psát rekurenci jedinou formulkou:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + A \cdot [n = 1] + B \cdot [n = 0].$$

Řešení

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + A \cdot [n = 1] + B \cdot [n = 0].$$

Tu nyní vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, \ldots$, čímž dostaneme:

$$\sum a_n x^n = x \cdot \sum a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \cdot \sum a_{n-2} x^{n-2} + A \cdot x + B.$$

Označíme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$, tím se rovnice přepíše na

$$f(x) = x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x) + A \cdot x + B.$$

Řešení

$$f(x) = x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x) + A \cdot x + B.$$

Převedením vyrazů obsahujících $f(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$(1 - x - x^2) \cdot f(x) = A \cdot x + B$$

neboli

$$(1 - \alpha \cdot x)(1 - \beta \cdot x) \cdot f(x) = A \cdot x + B,$$

kde α, $\beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Podělením koeficientem u $f(x)$ pak

$$f(x) = \frac{A \cdot x + B}{(1 - \alpha \cdot x)(1 - \beta \cdot x)}.$$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky dá

$$f(x) = C \cdot \frac{1}{1 - \alpha \cdot x} + D \cdot \frac{1}{1 - \beta \cdot x}.$$

a rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = C \cdot \sum (\alpha \cdot x)^n + D \cdot \sum (\beta \cdot x)^n.$$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky dá

$$f(x) = C \cdot \frac{1}{1 - \alpha \cdot x} + D \cdot \frac{1}{1 - \beta \cdot x}.$$

a rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = C \cdot \sum (\alpha \cdot x)^n + D \cdot \sum (\beta \cdot x)^n.$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$\begin{aligned} a_n &= C \cdot \alpha^n + D \cdot \beta^n \\ &= C \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + D \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Nyní teprve určíme neznámé koeficienty C a D, s ohledem na a_0 a a_1.

Řešení

$$\begin{aligned} a_n &= C \cdot \alpha^n + D \cdot \beta^n \\ &= C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Nyní teprve určíme neznámé koeficienty C a D, s ohledem na a_0 a a_1.

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + D \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ 1 = a_1 &= C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + D \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

Řešení

$$0 = a_0 = C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + D \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

$$1 = a_1 = C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + D \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

Úpravou dostaneme:

$$0 = C + D$$

$$2 = C \cdot (1+\sqrt{5}) + D \cdot (1-\sqrt{5})$$

jejímž řešením snadno obdržíme $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $D = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Řešení

Výsledné explicitní vyjádření pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti je tedy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Poznámka

Ukážeme si, jak lze "snadno" faktorizovat

$$a + bx + cx^2 = a \cdot (1 - \alpha x) \cdot (1 - \beta x)$$

Jde to pomocí vzorečku pro kořeny kvadratického polynomu: $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (jen jsme prohodili u polynomu roli a, c).

Poznámka

Ukážeme si, jak lze "snadno" faktorizovat

$$a + bx + cx^2 = a \cdot (1 - \alpha x) \cdot (1 - \beta x)$$

Jde to pomocí vzorečku pro kořeny kvadratického polynomu: $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (jen jsme prohodili u polynomu roli a, c). To je proto, že substituce $x = t^{-1}$ a vynásobení t^2 dá

$$t^2 \cdot (a + bt^{-1} + ct^{-2}) = t^2 \cdot a \cdot (1 - \alpha t^{-1}) \cdot (1 - \beta t^{-1})$$
$$at^2 + bt + c = a \cdot (t - \alpha) \cdot (t - \beta)$$

což je rozklad na kořenové činitele tak, jak jej známe, a standardní vzorec pro kořeny funguje (nyní jsou již koeficienty a, c standardně).

Poznámka

Ukážeme si, jak lze "snadno" faktorizovat

$$a + bx + cx^2 = a \cdot (1 - \alpha x) \cdot (1 - \beta x)$$

Jde to pomocí vzorečku pro kořeny kvadratického polynomu: $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (jen jsme prohodili u polynomu roli a, c). To je proto, že substituce $x = t^{-1}$ a vynásobení t^2 dá

$$t^2 \cdot (a + bt^{-1} + ct^{-2}) = t^2 \cdot a \cdot (1 - \alpha t^{-1}) \cdot (1 - \beta t^{-1})$$
$$at^2 + bt + c = a \cdot (t - \alpha) \cdot (t - \beta)$$

což je rozklad na kořenové činitele tak, jak jej známe, a standardní vzorec pro kořeny funguje (nyní jsou již koeficienty a, c standardně). Např.

$$1 - 5x + 6x^2 = \left(1 - \frac{5+1}{2}x\right) \cdot \left(1 - \frac{5-1}{2}x\right) = (1 - 3x) \cdot (1 - 2x).$$

Příklad

S využitím vytvořující funkce pro Fibonacciho posloupnost $F(x) = x/(1 - x - x^2)$ určete vytvořující funkci "poloviční" Fibonacciho posloupnosti $(F_0, F_2, F_4, \ldots)$.

Příklad

S využitím vytvořující funkce pro Fibonacciho posloupnost $F(x) = x/(1 - x - x^2)$ určete vytvořující funkci "poloviční" Fibonacciho posloupnosti $(F_0, F_2, F_4, \dots)$.

Řešení

Pišme $F(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \cdots$, pak

$$F(-x) = F_0 - F_1x + F_2x^2 - F_3x^3 + F_4x^4 - \cdots$$

a sečtením dostaneme

$$1/2 \cdot (F(x) + F(-x)) = F_0 + F_2x^2 + F_4x^4 + \cdots .$$

Hledanou vytvořující funkci pak získáme substitucí $\sqrt{x}$ za x.

Řešení

Snadnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 1/2 \cdot (F(x) + F(-x)) &= 1/2 \cdot \left(\frac{x}{1 - x - x^2} + \frac{-x}{1 + x - x^2} \right) \\ &= 1/2 \cdot \frac{x(1 + x - x^2) - x(1 - x - x^2)}{(1 - x - x^2)(1 + x - x^2)} \\ &= \frac{x^2}{(1 - x^2)^2 - x^2} = \frac{x^2}{1 - 3x^2 + x^4} \end{aligned}$$

a hledaná vytvořující funkce, vzniklá dosazením $\sqrt{x}$ za x, je pak

$$\frac{x}{1 - 3x + x^2}.$$

Poznámka

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

Potom máme následující "transformace":

$$\begin{array}{ccc}
f(x) & & (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \\
\downarrow & & \downarrow \\
f(-x) & & (a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, \ldots) \\
 & & \\
1/2 \cdot (f(x) + f(-x)) & & (a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots) \\
\| & & \| \\
g(x^2) & & (b_0, 0, b_1, 0, b_2, \ldots) \\
\uparrow & & \uparrow \\
g(x) & & (b_0, b_1, b_2, \ldots)
\end{array}$$

Poznámka

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots$$

Potom:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Tato “konvoluce” $(a * b)_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$ má následující speciální případy:

Poznámka

Tato "konvoluce" $(a * b)_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ má následující speciální případy:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) * (0, 1, 0, \ldots) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

na úrovni vytvořujících funkcí: $f(x) \cdot x$ je vytvořující funkcí pro posunutou posloupnost (a_{n-1}).

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) * (1, 1, 1, \ldots) = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots),$$

na úrovni vytvořujících funkcí: $f(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí pro posloupnost $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ částečných součtů.

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) * (0, 1, 1, \ldots) = (0, a_0, a_0 + a_1, \ldots),$$

na úrovni vytvořujících funkcí: $f(x) \cdot \frac{x}{1-x}$ je vytvořující funkcí pro posunutou posloupnost $(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$ částečných součtů.

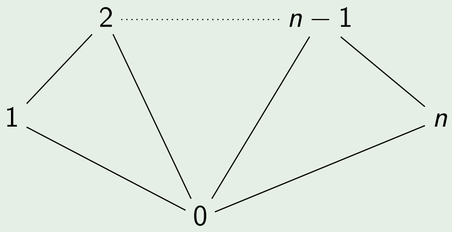
Příklad

Vějířem řádu n nazveme graf na $n+1$ vrcholech $0, 1, \ldots, n$, který má následujících $2n-1$ hran: vrchol 0 je spojen hranou s každým ze zbylých vrcholů a každý vrchol k je spojen hranou s vrcholem $k+1$ (pro $1 \leq k < n$). Kolik koster má takový graf?

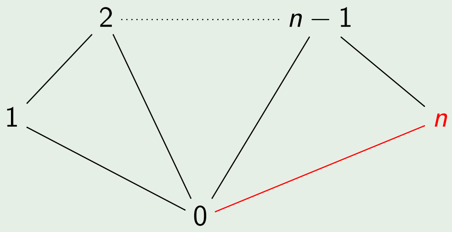
Příklad

Vějířem řádu n nazveme graf na $n+1$ vrcholech $0, 1, \ldots, n$, který má následujících $2n-1$ hran: vrchol 0 je spojen hranou s každým ze zbylých vrcholů a každý vrchol k je spojen hranou s vrcholem $k+1$ (pro $1 \leq k < n$). Kolik koster má takový graf?

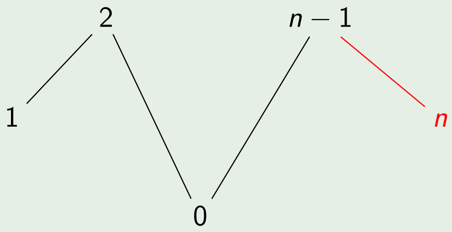
Řešení



Řešení

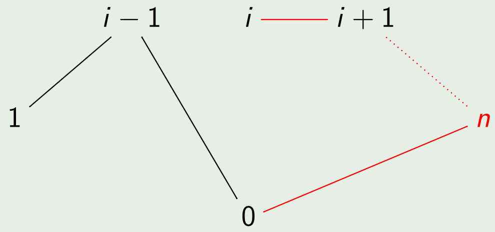


Řešení



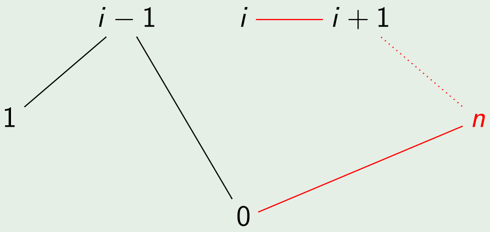
1. pokud $n > 1$ (aby vrchol n nebyl izolovaný), koster tohoto typu je v_{n-1}.

Řešení



1. pokud $n > 1$ (aby vrchol n nebyl izolovaný), koster tohoto typu je v_{n-1}.
2. koster tohoto typu je v_{i-1}, pro libovolné $i = 1, 2, \dots, n$.

Řešení



1. pokud $n > 1$ (aby vrchol n nebyl izolovaný), koster tohoto typu je v_{n-1}.
2. koster tohoto typu je v_{i-1}, pro libovolné $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$v_n = v_{n-1} \cdot [n > 1] + v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}$$

Řešení

$$v_n = v_{n-1} \cdot [n > 1] + v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}$$

Z logiky věci je vějíř rádu 0 jediný graf s jedním vrcholem a ten má právě jednu kostru, tedy $v_0 = 1$ (to sedí i s předchozí analýzou, kde v_0 vystupuje). Můžeme tedy psát

$$v_{n-1} \cdot [n > 1] = v_{n-1} - [n = 1]$$

a rekurenci lze přepsat jako:

$$v_n = v_{n-1} + v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1} - [n = 1] + [n = 0].$$

Vytvořující funkci pro (v_n) označme $V(x)$, pak vytvořující funkce pro (v_{n-1}) je $V(x) \cdot x$ a pro $(v_0 + \cdots + v_{n-1})$ je $V(x) \cdot \frac{x}{1-x}$ a tedy

$$V(x) = V(x) \cdot x + V(x) \cdot \frac{x}{1-x} - x + 1.$$

Řešení

$$V(x) = V(x) \cdot x + V(x) \cdot \frac{x}{1-x} - x + 1.$$

Převedením vyrazů obsahujících $V(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$\frac{1-3x+x^2}{1-x} \cdot V(x) = 1 - x.$$

Podělením koeficientem u $V(x)$ pak

$$V(x) = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2} = 1 + \frac{x}{1-3x+x^2}.$$

S využitím předchozího příkladu:

$$v_n = [n = 0] + F_{2n}$$

tj. $v_n = F_{2n}$ pro $n > 0$, a $v_0 = 1$ (zatímco $F_0 = 0$).

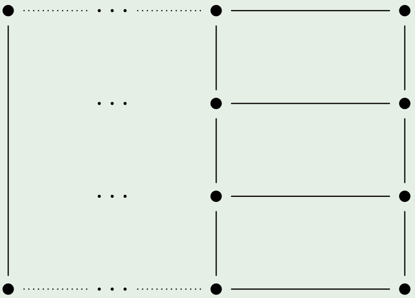
Příklad

Určete, kolika způsoby lze pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $n \times 3$ (a vyčíslete tuto hodnotu pro obdélník 20×3)?

Příklad

Určete, kolika způsoby lze pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $n \times 3$ (a vyčíslete tuto hodnotu pro obdélník 20×3)?

Řešení

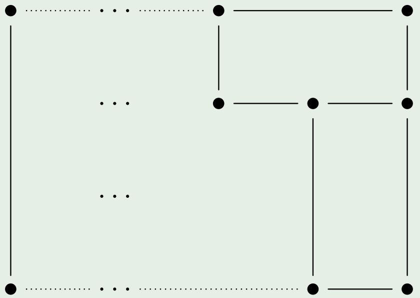


$$c_n = c_{n-2} +$$

Příklad

Určete, kolika způsoby lze pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $n \times 3$ (a vyčíslete tuto hodnotu pro obdélník 20×3)?

Řešení

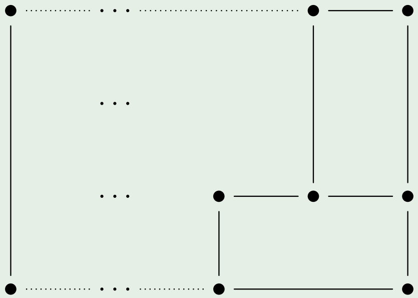


$$c_n = c_{n-2} + r_{n-1} +$$

Příklad

Určete, kolika způsoby lze pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $n \times 3$ (a vyčíslete tuto hodnotu pro obdélník 20×3)?

Řešení



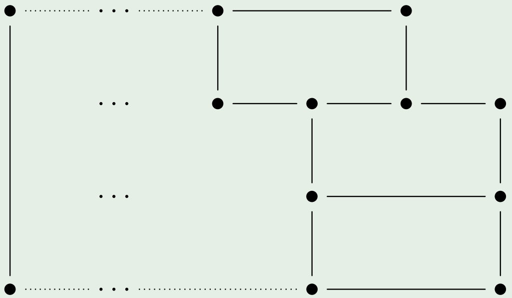
$$c_n = c_{n-2} + r_{n-1} + r_{n-1}$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + r_{n-1} + r_{n-1}$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + r_{n-1} + r_{n-1}$$



$$r_n = r_{n-2} +$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + r_{n-1} + r_{n-1}$$

$$r_n = r_{n-2} + c_{n-1}$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + 2r_{n-1}$$
$$r_n = r_{n-2} + c_{n-1}$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + 2r_{n-1} + ? \cdot [n = 1] + ? \cdot [n = 0]$$
$$r_n = r_{n-2} + c_{n-1} + ? \cdot [n = 1] + ? \cdot [n = 0]$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + 2r_{n-1} + ? \cdot [n = 1] + ? \cdot [n = 0]$$
$$r_n = r_{n-2} + c_{n-1} + ? \cdot [n = 1] + ? \cdot [n = 0]$$

$$C(x) = C(x) \cdot x^2 + 2R(x) \cdot x + \text{linear}$$
$$R(x) = R(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot x + \text{linear}$$

Řešení

$$c_n = c_{n-2} + 2r_{n-1} + ? \cdot [n = 1] + ? \cdot [n = 0]$$
$$r_n = r_{n-2} + c_{n-1} + ? \cdot [n = 1] + ? \cdot [n = 0]$$

$$C(x) = C(x) \cdot x^2 + 2R(x) \cdot x + \text{linear}$$
$$R(x) = R(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot x + \text{linear}$$

$$C(x) \cdot (1 - x^2) = R(x) \cdot 2x + \text{linear} \qquad / \cdot (1 - x^2)$$
$$R(x) \cdot (1 - x^2) = C(x) \cdot x + \text{linear} \qquad / \cdot 2x$$

$$C(x) \cdot (1 - x^2)^2 = C(x) \cdot 2x^2 + \text{cubic}$$

Řešení

$$C(x) \cdot (1-x^2)^2 = C(x) \cdot 2x^2 + \text{cubic}$$

Převedením prvního výrazu napravo na levou stranu dostaneme

$$C(x) \cdot ((1-x^2)^2 - 2x^2) = \text{cubic}$$

$$C(x) = \frac{\text{cubic}}{(1-x^2)^2 - 2x^2} = \frac{\text{cubic}}{1 - 4x^2 + x^4}$$

$$C(x) = \frac{\text{cubic}}{(1-(2+\sqrt{3})x^2) \cdot (1-(2-\sqrt{3})x^2)}$$

Označme $\lambda^2 = 2 + \sqrt{3}$, $\mu^2 = 2 - \sqrt{3}$. Pak

$$C(x) = \frac{\text{cubic}}{(1-\lambda^2 x^2) \cdot (1-\mu^2 x^2)}$$

$$= \frac{\text{cubic}}{(1-\lambda x) \cdot (1+\lambda x) \cdot (1-\mu x) \cdot (1+\mu x)}$$

Řešení

$$C(x) = \frac{\text{cubic}}{(1-\lambda x)\cdot(1+\lambda x)\cdot(1-\mu x)\cdot(1+\mu x)}$$

a rozklad na parciální zlomky dá

$$C(x) = \frac{A_+}{1-\lambda x} + \frac{A_-}{1+\lambda x} + \frac{B_+}{1-\mu x} + \frac{B_-}{1+\mu x}$$

pro neznámé konstanty $A_\pm$, $B_\pm$. Hledaná posloupnost (tedy počet dláždění) je

$$c_n = A_+ \cdot \lambda^n + A_- \cdot (-\lambda)^n + B_+ \cdot \mu^n + B_- \cdot (-\mu)^n$$

Zbývá určit tyto konstanty, k tomu využijeme první 4 členy posloupnosti:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 0.$$

Řešení

$$c_n = A_+ \cdot \lambda^n + A_- \cdot (-\lambda)^n + B_+ \cdot \mu^n + B_- \cdot (-\mu)^n,$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 0.$$

Pro $n = 1$ a $n = 3$ dostáváme konkrétně

$$(A_+ - A_-) \cdot \lambda + (B_+ - B_-) \cdot \mu = 0$$
$$(A_+ - A_-) \cdot \lambda^3 + (B_+ - B_-) \cdot \mu^3 = 0$$

Protože jsou dvojice (λ, μ) a (λ^3, μ^3) lineárně nezávislé, znamená to, že

$$A_+ - A_- = 0, \quad B_+ - B_- = 0$$

tj. $A_+ = A_- = A$, $B_+ = B_- = B$. Zbylé dvě rovnice pak jsou

$$A \cdot 2 + B \cdot 2 = 1$$
$$A \cdot 2\lambda^2 + B \cdot 2\mu^2 = 3$$

Řešení

$$A \cdot 2 + B \cdot 2 = 1$$
$$A \cdot 2\lambda^2 + B \cdot 2\mu^2 = 3$$

jejímž řešením je (připomeňme $\lambda^2 = 2 + \sqrt{3}$, $\mu^2 = 2 - \sqrt{3}$):

$$A = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, \quad B = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

Dosazením tak

$$c_n = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot (\lambda^n + (-\lambda)^n) + \frac{-1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot (\mu^n + (-\mu)^n)$$

Řešení

$$c_n = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot (\lambda^n + (-\lambda)^n) + \frac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot (\mu^n + (-\mu)^n)$$

Pro n lichá je tento výraz nulový (závorky jsou nulové), což je jasné i z lichosti počtu čtverců v obdélníku v tomto případě. Pro $n = 2k$ dostaneme

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot (\lambda^{2k} + (-\lambda)^{2k}) + \frac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \cdot (\mu^{2k} + (-\mu)^{2k}) \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \lambda^{2k} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \mu^{2k} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot (2+\sqrt{3})^k + \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3})^k \end{aligned}$$

$\Rightarrow c_{20} = 413\ 403.$