Diskrétní matematika – cvičení 9. týden

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2020

Příklad

Určete počet způsobů, jak lze na šachovnici (8×8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci).

Příklad

Určete počet způsobů, jak lze na šachovnici (8×8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci).

Řešení

Pravidlo součtu: $|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|$.

Příklad

Určete počet způsobů, jak lze na šachovnici (8×8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci).

Řešení

Pravidlo součtu: $|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|$.
Rozdělme rozestavení podle zadání v závislosti na pozici bílé věže: ta může stát na libovolném ze 64 polí, takže $k = 64$ a pro každý index i je A_i množina rozestavení podle zadání, ve kterých je bílá věž na i-tém poli. Zjevně jsou tyto možnosti disjunktní. Kolik je takových rozestavení?

Příklad

Určete počet způsobů, jak lze na šachovnici (8×8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci).

Řešení

Pravidlo součtu: $|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|$.
Rozdělme rozestavení podle zadání v závislosti na pozici bílé věže: ta může stát na libovolném ze 64 polí, takže $k = 64$ a pro každý index i je A_i množina rozestavení podle zadání, ve kterých je bílá věž na i-tém poli. Zjevně jsou tyto možnosti disjunktní. Kolik je takových rozestavení? Černá věž může být na libovolném ze zbývajících 7 řádků a libovolném ze zbývajících 7 sloupců, takže $|A_i| = 7 \cdot 7$, nezávisle na i:

$$|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_{64}| = \underbrace{49 + \cdots + 49}_{64\times} = 64 \cdot 49.$$

Řešení

Pravidlo součtu: $|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|$.
Pravidlo součinu: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, tj. pokud činíme dvě nezávislé volby, je počet možností roven součinu. Viděli jsme, že stačí aby *počet* druhých voleb nezávisel na první volbě,

Řešení

Pravidlo součtu: $|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|$.
Pravidlo součinu: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, tj. pokud činíme dvě nezávislé volby, je počet možností roven součinu. Viděli jsme, že stačí aby *počet* druhých voleb nezávisel na první volbě, klasicky např. pro permutace: počet všech pořadí utvořených z n-prvkové množiny rozdělíme podle toho, který prvek je na prvním místě: na druhém místě pak volíme z $n-1$ možností (závisle na první možnosti, ale počet možností je nezávislý), atd. Dostaneme samozřejmě $n!$.

Příklad

Během schůze má vystoupit 8 řečníků. Stanovte počet všech pořadí, v nichž dva předem určení řečníci nevystupují ihned po sobě.

Příklad

Během schůze má vystoupit 8 řečníků. Stanovte počet všech pořadí, v nichž dva předem určení řečníci nevystupují ihned po sobě.

Řešení

Pravidlo doplňku: pro $B \subseteq A$ platí $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Příklad

Během schůze má vystoupit 8 řečníků. Stanovte počet všech pořadí, v nichž dva předem určení řečníci nevystupují ihned po sobě.

Řešení

Pravidlo doplňku: pro $B \subseteq A$ platí $|A \setminus B| = |A| - |B|$.
V našem případě spočítáme ta pořadí, ve kterých naopak vystupují dva daní řečníci po sobě, nazvěme je X a Y, můžou tedy v programu být buď v pořadí XY nebo YX. Pro každou z těchto dvou možností z nich udělejme jednoho “dvojřečníka”, takže počet takových pořadí bude $2 \cdot 7!$. Protože počet všech pořadí je $8!$, hledaný počet je $8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7!$.

Poznámka

Kombinační čísla: Označme $\binom{n}{k}$ počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Zjevně

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

je počet všch podmnožin n-prvkové množiny, a těch je 2^n, protože lze nezávisle u každého prvku volit, zda do podmnožiny patří, či nikoliv.

Poznámka

Kombinační čísla: Označme $\binom{n}{k}$ počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Zjevně

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

je počet všch podmnožin n-prvkové množiny, a těch je 2^n, protože lze nezávisle u každého prvku volit, zda do podmnožiny patří, či nikoliv.

Poznámka

Kombinační čísla: Označme $\binom{n}{k}$ počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Zjevně

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

je počet všch podmnožin n-prvkové množiny, a těch je 2^n, protože lze nezávisle u každého prvku volit, zda do podmnožiny patří, či nikoliv.

Protože $\binom{n}{k} \cdot k!$ je počet pořadí k prvků z n-prvkové množiny a ten je roven $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, dostáváme formulku

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Poznámka

Kombinační čísla: Označme $\binom{n}{k}$ počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Zjevně

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

je počet všch podmnožin n-prvkové množiny, a těch je 2^n, protože lze nezávisle u každého prvku volit, zda do podmnožiny patří, či nikoliv.

Protože $\binom{n}{k} \cdot k!$ je počet pořadí k prvků z n-prvkové množiny a ten je roven $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, dostáváme formulku

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Příklad

Kolika způsoby může sportovec umístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Příklad

Kolika způsoby může sportovec umístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Řešení

Označíme-li poháry 0 až 9, můžeme umístění sdělit tak, že budeme postupně svrchu dolů a v rámci poliček zleva doprava říkat čísla pohárů a konce poliček, označme je třeba znakem $|$. Výsledkem tak může být například:

$$24||8657|9|103.$$

Zjevně počet umístění je roven počtu takových posloupností, skládajících se z číslic 0 až 9 (každá jednou) a čtyř znaků $|$. Kolik jich je?

Příklad

Kolika způsoby může sportovec umístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Řešení

Označíme-li poháry 0 až 9, můžeme umístění sdělit tak, že budeme postupně svrchu dolů a v rámci poliček zleva doprava říkat čísla pohárů a konce poliček, označme je třeba znakem $|$. Výsledkem tak může být například:

$$24||8657|9|103.$$

Zjevně počet umístění je roven počtu takových posloupností, skládajících se z číslic 0 až 9 (každá jednou) a čtyř znaků $|$. Kolik jich je? Vyberme prvně místa, kde se vyskytují znaky $|$, tj. vybereme 4 místa ze 14. Počet takových výběrů je $\binom{14}{4}$. Nezávisle na výběru čtyř pozic pro znak $|$ je počet posloupností roven počtu všech pořadí čísel 0 až 9, tj. 10!. Výsledný počet tak je $\binom{14}{4} \cdot 10! = \frac{14!}{4!}$.

Příklad

Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v množině nezáporných celých čísel (kladných celých čísel).

Příklad

Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v množině nezáporných celých čísel (kladných celých čísel).

Řešení

Příklad je analogií předchozího, kde nerozlišujeme jednotlivé poháry a jde jen o jejich počet, budeme tedy řešení zapisovat ve tvaru posloupností

$$\underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{x_1 \times} \,|\, \cdots \,|\, \underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{x_k \times}$$

skládajících se z n znaků $\bullet$ a $k-1$ znaků $|$. Opět prvně vybereme $k-1$ míst, kam umístíme znaky $|$, zbytek je pak už ale jednoznačně daný, takže výsledkem je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Příklad

Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v množině nezáporných celých čísel (kladných celých čísel).

Řešení

Pro kladná celá čísla převedem úlohu na předchozí – pišme $x_i = 1 + y_i$ a nyní jsou y_i nezáporná celá čísla a řešíme rovnici

$$\begin{aligned}(1 + y_1) + (1 + y_2) + \cdots + (1 + y_k) &= n \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_k &= n - k\end{aligned}$$

a z předchozího víme, že počet řešení je $\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

Příklad

Určete počet všech řešení soustavy nerovnic

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq n$$

v množině nezáporných celých čísel (to samé pro ostré nerovnosti).

Příklad

Určete počet všech řešení soustavy nerovnic

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq n$$

v množině nezáporných celých čísel (to samé pro ostré nerovnosti).

Řešení

Označíme-li rozdíly $y_1 = x_1 - 0$, $y_2 = x_2 - x_1$, $\dots$, $y_k = x_k - x_{k-1}, y_{k+1} = n - x_k$,

$$0 \underset{y_1}{\overline{\qquad\quad}} x_1 \underset{y_2}{\overline{\qquad\quad}} x_2 \overline{\qquad\quad} \cdots \overline{\qquad\quad} x_{k-1} \underset{y_k}{\overline{\qquad\quad}} x_k \underset{y_{k+1}}{\overline{\qquad\quad}} n$$

pak se jedná o nezáporná celá čísla se součtem n a víme, že

$$y_1 + \cdots + y_{k+1} = n$$

má $\binom{n+k}{k}$ řešení.

Příklad

Určete počet všech řešení soustavy nerovnic

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq n$$

v množině nezáporných celých čísel (to samé pro ostré nerovnosti).

Řešení

Pro ostré nerovnice dají rozdíly kladná celá čísla a počet řešení tedy je $\binom{n-1}{k}$. (Přímo: jde jen o k-prvkovou podmnožinu množiny $\{1, \ldots, n-1\}$.)

Příklad

Na kolik nejvýše oblastí může dělit rovinu n přímek?

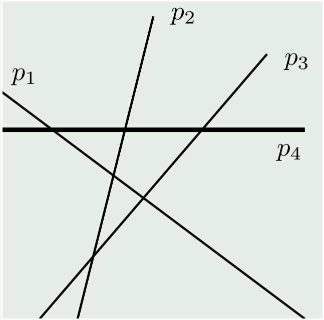
Příklad

Na kolik nejvýše oblastí může dělit rovinu n přímek?

Řešení

Označme tento počet p_n, zjevně $p_0 = 1$. Co se stane přidáním n-té přímky? Ta protne některé oblasti a každou tak rozdělí na dvě části, počet oblastí p_n je tedy oproti p_{n-1} vyšší právě o počet oblastí, které n-tá přímka protne.

Řešení



Jednotlivé oblasti přímka protne v intervalu, dělícími body jsou pak právě průsečíky s ostatními přímkami. Protože těch je $n-1$, je intervalů n a nejvyšší počet oblastí je pak roven (lze jej snadno dosáhnout)

$$p_n = p_{n-1} + n = \cdots$$

Řešení

Jednotlivé oblasti přímka protne v intervalu, dělícími body jsou pak právě průsečíky s ostatními přímkami. Protože těch je $n - 1$, je intervalů n a nejvyšší počet oblastí je pak roven (lze jej snadno dosáhnout)

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + n = p_{n-2} + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= p_0 + 1 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Příklad

Kolika způsoby mohla skončit tabulka první fotbalové ligy (v potaz bereme pouze pořadí), víme-li o ní pouze, že alespoň jeden z týmů z dvojice Ostrava, Olomouc je v tabulce za týmem Brna (ligu hraje 16 mužstev).

Příklad

Kolika způsoby mohla skončit tabulka první fotbalové ligy (v potaz bereme pouze pořadí), víme-li o ní pouze, že alespoň jeden z týmů z dvojice Ostrava, Olomouc je v tabulce za týmem Brna (ligu hraje 16 mužstev).

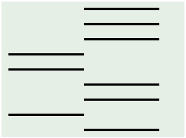
Řešení

Rozdělíme úlohu na několik snazších:

- počet vzájemných pořadí trojice zmíněných týmů – z šesti možných pořadí jsou povoleny právě 4
- počet vzájemných pořadí zbylých třinácti týmů – nejsou žádná omezení, je jich tedy 13!
- . . .

Řešení

- ...
- počet způsobů, jak vybraná dvě vzájemná pořádí (tří a třinácti týmů) dát dohromady – k tomu stačí vybrat, na kterých třech pozicích se umístili zmíněné týmy, to lze $\binom{16}{3}$ způsoby



Výsledný počet tak je $4 \cdot 13! \cdot \binom{16}{3} = \frac{4 \cdot 16!}{3!}$.

Příklad

Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou cifer.
Určete počet čísel menších než 10 tisíc, které mají symetrický ciferný zápis.

Příklad

Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou cifer.
Určete počet čísel menších než 10 tisíc, které mají symetrický ciferný zápis.

Řešení

Opět úlohu rozdělíme na několik jednodušších:

- možnosti na vybrání dvou číslic, které se v čísle vyskytují:
  - $\binom{9}{2}$, ve kterých se nevyskytuje 0 a
  - $\binom{9}{1}$, ve kterých se vyskytuje 0
- počet čísel tvořených vybranými dvěma číslicemi: v prvním případě $2^4 - 2$ (na každé ze čtyř pozic dvě možnosti, minus dvě čísla tvořená pouze jednou ze dvou číslic) a ve druhém případě $2^3 - 1$ (na prvním místě nemůže být nula a je na něj tedy jen jedna možnost)

Výsledný počet tak je $\binom{9}{2} \cdot (2^4 - 2) + \binom{9}{1} \cdot (2^3 - 1)$.

Příklad

Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou cifer.
Určete počet čísel menších než 10 tisíc, které mají symetrický ciferný zápis.

Příklad

Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou cifer. Určete počet čísel menších než 10 tisíc, které mají symetrický ciferný zápis.

Řešení

Ve druhém případě budou mít čísla jeden z tvarů $ABBA$, ABA, AA, A, kde zjevně A je libovolná číslice s výjimkou 0 a B je zcela libovolná číslice (může být i stejná jako A). Počet takových čísel tedy je:

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 9 + 9.$$

Příklad

Kolika způsoby lze rozdělit 9 děvčat a 6 chlapců do dvou skupin tak, aby každá skupina obsahovala alespoň dva chlapce?

Kolika způsoby lze rozdělit 9 masitých a 6 vegetariánských sendvičů do dvou skupin tak, aby každá skupina obsahovala alespoň dva vegetariánské?

Příklad

Kolika způsoby lze rozdělit 9 děvčat a 6 chlapců do dvou skupin tak, aby každá skupina obsahovala alespoň dva chlapce? Kolika způsoby lze rozdělit 9 masitých a 6 vegetariánských sendvičů do dvou skupin tak, aby každá skupina obsahovala alespoň dva vegetariánské?

Řešení

Budeme vybírat členy první skupiny: děvčat můžeme vzít libovolný počet a možností je

$$2^9 = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \cdots + \binom{9}{9},$$

chlapců můžeme vzít pouze počet 2 až 4 a možností je

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}.$$

Řešení

Budeme vybírat členy první skupiny: děvčat můžeme vzít libovolný počet a možností je

$$2^9 = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \cdots + \binom{9}{9},$$

chlapců můžeme vzít pouze počet 2 až 4 a možností je

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}.$$

Počet rozdělení je tak

$$2^9 \cdot \left(\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\right).$$

Řešení

Budeme vybírat členy první skupiny: masitých sendvičů můžeme vzít libovolný počet a možností je

$$10 = 1 + 1 + \cdots + 1,$$

vegerariánských sendvičů můžeme vzít pouze počet 2 až 4 a možností je

$$3 = 1 + 1 + 1.$$

Počet rozdělení je tak

$$10 \cdot 3.$$

Příklad

Kolika způsoby je možné koupit 12 balíčků kávy, mají-li v prodejně kávu pěti druhů?

Dále tuto úlohu řešte s následujícími modifikacemi:

1. od každé kávy je třeba koupit aspoň 2 balíčky;
2. od každé kávy má být koupen sudý počet balíčků;
3. jedné z káv (např. arabské) jsou k dispozici pouze 3 balíčky.

Příklad

Kolika způsoby je možné koupit 12 balíčků kávy, mají-li v prodejně kávu pěti druhů?

Dále tuto úlohu řešte s následujícími modifikacemi:

1. od každé kávy je třeba koupit aspoň 2 balíčky;
2. od každé kávy má být koupen sudý počet balíčků;
3. jedné z káv (např. arabské) jsou k dispozici pouze 3 balíčky.

Řešení

Ukážeme, že se jedná o koeficient u x^{12} ve výrazu $(1 + x + x^2 + \cdots)^5$, pojďme tedy tento koeficient popsat.

Řešení

Ukážeme, že se jedná o koeficient u x^{12} ve výrazu $(1 + x + x^2 + \cdots)^5$, pojďme tedy tento koeficient popsat. Zjevně po roznásobení vyjdou výrazy tvaru

$$x^a \cdot x^b \cdot x^c \cdot x^d \cdot x^e = x^{a+b+c+d+e},$$

kde každý činitel pochází z jedné závorky $(1 + x + x^2 + \cdots)$, exponenty a, b, c, d, e tedy mohou být libovolná nezáporná celá čísla. Dostaneme tak x^{12}, kdykoliv bude $a + b + c + d + e = 12$, vždy s koeficientem 1, takže výsledný koeficient bude

$$1 + 1 + \cdots + 1,$$

kde počet jedniček je roven počtu pětic (a, b, c, d, e) nezáporných celých čísel se součtem 12.

Řešení

Koeficient u x^{12} ve výrazu $(1 + x + x^2 + \cdots)^5$ je tedy počet pětic (a, b, c, d, e) nezáporných celých čísel se součtem 12. To je zřejmě počet nákupů ze zadání. Když sečteme geometrickou řadu v závorce, hledaný počet je koeficient u x^{12} v

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^5 = \frac{1}{(1-x)^5}.$$

Úlohu lze vyřešit elementárně – počet možných nákupů n balení, a tedy koeficient u x^n, je $\binom{n+4}{4}$, takže

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \binom{0+4}{4} + \binom{1+4}{4} \cdot x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^n.$$

Tento a podobné vzorečky budeme využívat od příště.

Řešení

Pojďme nyní na jednotlivé modifikace:

- od každé kávy aspoň 2 balíčky: chceme $a \geq 2$, $b \geq 2$ atd., takže analogicky se jedná o koeficient u x^{12} ve výrazu

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5 = \left(x^2 \cdot \frac{1}{1-x}\right)^5 = x^{10} \cdot \frac{1}{(1-x)^5}.$$

- od každé kávy sudý počet balíčků: chceme $2 \mid a$, $2 \mid b$ atd., takže analogicky se jedná o koeficient u x^{12} ve výrazu

$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots)^5 = \frac{1}{(1-x^2)^5}.$$

- od jedné z káv jsou k dispozici pouze 3 balíčky: chceme $a \leq 3$, takže analogicky se jedná o koeficient u x^{12} ve výrazu

$$(1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)^4 = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{(1-x)^4}.$$

Poznámka

Od příště se budeme zabývat metodami, které umožní podobné příklady dopočítat do konce. Připomeňte si součet geometrické řady, zejména již použitý vzorec:

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Připomeňte si binomickou větu:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{k}x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = (1+x)^k.$$

Tyto dvě věty zobecníme a budeme jejich zobecnění používat ke kombinatorickým výpočtům.