1. cvičení z MB154, podzim 2021

Příklad 1. Dokažte, že pro všechna celá čísla n platí:

- n^2 dává zbytek 0 nebo 1 po dělení 4;
- n^2 dává zbytek 0, 1 nebo 4 po dělení 8.

(Buď je $n = 2k$ nebo $n = 2k + 1$.)

Příklad 2. Spočtěte největší společné dělitele $(89, 55)$, $(157, 58)$, poté u prvního ukažte, jak lze výpočet zkrátit s použitím záporných zbytků.

Příklad 3. Spočtěte Bezoutovy koeficienty pro $(157, 58)$ z minulého příkladu zpětným dosazováním a pak úpravou tabulky (matice)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 157 \\ 0 & 1 & 58 \end{matrix}$$

Dále spočtěte Bezoutovy koeficienty pro $(123, 91)$, stačí už pouze druhou metodou.

Příklad 4. Zjistěte, pro která přirozená čísla n je číslo $n^3 - n^2 + 2n + 1$ dělitelné číslem $n - 2$. (Dělení polynomů se zbytkem – není tak dobré jako dělení čísel se zbytkem, ale tady k výsledku dospěje.)

Příklad 5. Zjistěte, pro která přirozená čísla n je číslo $7n + 1$ dělitelné číslem $3n + 4$. (Bude to právě tehdy, když bude dělitelné $3(7n + 1)$, po pravdě stačí snazší implikace.)

Příklad 6. Nalezněte největšího společného dělitele $(2^{63} - 1, 2^{28} - 1)$. (Ve skutečnosti základ 2 není podstatný, lze přejmenovat na n a použít metodu dělení polynomů se zbytkem.)

Označme n-té Fibonacciho číslo F_n, tj. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Příklad 7. Najděte největší společné dělitele (F_n, F_{n-1}), (F_n, F_{n-2}), (F_n, F_{n-3}), (F_n, F_{n-4}); kdybyste se nudili, tak (F_{2n}, F_n).