Diskrétní matematika – 10. týden
Vytvořující funkce

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

1. Vytvořující funkce
2. (Formální) mocninné řady
   - Přehled mocninných řad
3. Operace s vytvořujícími funkcemi

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i + j + k = 22$ a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\},\ j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\},\ k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

hledaný počet

$$\dots + a_{22} x^{22} + \dots$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(x^0+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

x^i x^j x^k

$$x^i \cdot x^j \cdot x^k = x^{i+j+k} = x^{22}$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu.

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i+j+k=22$ a zároveň

$$i \in \{0,1,2,3,4\},\ j \in \{0,2,4,6,8,10\},\ k \in \{0,5,10,15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(x^0+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

$\dots + 4x^{22} + \dots$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři možnosti** $3*5+3*2+1*1$, $3*5+2*2+3*1$, $2*5+5*2+2*1$ a $2*5+4*2+4*1$

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah". Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.
Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$ a a_{50} taková, že a_i je násobkem i pro všechna $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ a zároveň $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah". Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$ a a_{50} taková, že a_i je násobkem i pro všechna $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ a zároveň $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$. Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u x^{100} v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$
$$(1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$

Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^7 v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots+x^{15}).$$

Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^7 v součinu

33

$$(1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots+x^{15}).$$

Když máme předepsaný nějaký počet jako nejmenší možný, prostě začneme až od příslušných mocnin.

bez omezení až na:

$\binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 36$

7 c 0 m 0 b
6 c 1 m 0 b
6 c 0 m 1 b
} 3

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Věta (binomická)

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $r \in \mathbb{R}$ platí

koef. zajímavé

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Na pravou stranu se můžeme dívat jako na součin n polynomů, levá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Věta (binomická)

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $r \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

$x = -1$
$n = 0$

$0^0 = 1$

Na pravou stranu se můžeme dívat jako na součin n polynomů, levá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením. Dosazením čísel $x = 1$, resp. $x = -1$ dostáváme známé vzorce:

← počet ~~k-prvk.~~ podm. n-prvk.

Důsledek

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$ $n \geq 1$

$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

2^3
2^4

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

$$\sum \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \qquad / ()'$$

Důsledek

$$\sum \binom{n}{k} k \cdot x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} \cdot 1$$

$$(1+x)'$$

Platí

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots}{k\cdot(k-1)\cdots 1}$$

$$= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

Důsledek

Platí

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme $n(1+x)^{n-1}$, derivací pravé strany (člen po členu) pak $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Dosazením $x=1$ dostaneme tvrzení. □

Plán přednášky

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

$(a_0, a_1, a_2, \ldots)$

$a_k =$ prům. počet porovnání v qsort(L)

délka

$a_k =$ počet prvočísel $\leq k$

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat.

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninnných řad k příslušným funkcím.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1-x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

$(1, 1, 1, 1, \dots) \xleftrightarrow{\text{form.}} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

sečteme, =

$\frac{1}{1-x}$ $\quad$ $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ $\quad$ $f(x)$

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1-x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci,...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1-x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci,...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$(a_n) \longleftrightarrow \sum a_n x^n$

$f(x)$

$a_n = F(a_{n-1}, n)$

$= F(a_{n-1}, a_{n-2}, n)$

$= F(a_{n-1}, \ldots, a_0, n)$

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro *k*-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro k-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n$$

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro k-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo alespoň asymptotické chování.

Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $R \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $k \gg 0$ *je* $|a_k| \leq R^k$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$.

Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $R \in \mathbb{R}$, že pro všechna $k \gg 0$ je $|a_k| \leq R^k$, pak řada

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

f.m.ř.

fce

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$. Hodnotami funkce $a(x)$ na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má $a(x)$ v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}.$$

$$f(x) = \sum \frac{a^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Přehled mocninných řad

$(1,1,1,\dots)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k,$$

$\int_0^x$

$-\ln(1-x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$

$\ln \frac{1}{1-x}$

$(0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k},$$

$(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots)$

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

$$\cancel{\sin x = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}},$$

$$\cancel{\cos x = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

$k(k-1)(k-2)\cdots \quad 1$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

!

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

Plán přednášky

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.

$$\longrightarrow \sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

$$\sum (\alpha \cdot a_k) x^k = \alpha \cdot \sum a_k x^k$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.

$$x^k(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

$$= a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \ldots$$

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{0 \ldots k-1}, \underset{k}{a_0}, a_1, a_2, \ldots)$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- inverze Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \ldots, a_{k-1}, 0, \ldots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).

$$\Big(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\Big)' = \sum_{\substack{k\geq 0\\ k\geq 1}} a_k k \cdot x^{k-1}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \underbrace{a_{k+1}(k+1)} x^k$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde

$i+j=k$

$a_i b_j x^k$

$\parallel$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

$a_i x^i$ $\qquad$ $b_j x^j$ $\qquad$ $a_i b_j x^{i+j}$

tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k)$. Posloupnost (c_n) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_n), (b_n)$.

$b_n = 1$ $\qquad$ $c_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

$b_k = 1$

$b(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$

$= \frac{1}{1-x}$

$a_k = \frac{1}{k}$

$H_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \dots)$ se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0} \overset{1+1+\cdots+1}{\overset{\parallel}{(n+1)}} x^n,$$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \dots)$ se sebou vztahy

$(1)'$ $\quad \frac{1}{2}(1)''$ $\quad (0+1)+(1+1)+\dots+(n+1)$ $\quad ''$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}x^n,$$

což již sice máme dokázáno z dřívějška (dokonce dvakrát – jednou díky zobecněné binomické větě a podruhé díky derivaci řady), ale další důkaz jistě nezaškodí :-).

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{50}).$$

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{50}).$$

Tento součin upravíme na tvar $(1-x)^{-3}(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$, odkud pomocí zobecněné binomické věty dostaneme

$$\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}x^2+\cdots\right)(1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+x^{72}+\dots)$$

a tedy koeficientem u x^{70} je zřejmě $\binom{70+2}{2}-\binom{70+2-31}{2}-\binom{70+2-41}{2}-\binom{70+2-51}{2}=1061.$

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Řešení

Potřebnou konvoluci získáme součinem řad $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$.

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Řešení

Potřebnou konvoluci získáme součinem řad $\underbrace{\frac{1}{1-x}}$ a $\underbrace{\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}}$.

Odtud

$a_{n-k} = n-k+1$ $b_k = \frac{1}{k}$

$$[x^n]\frac{1}{(1-x)^2} \cdot \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\frac{1}{k},$$

$c_n = \sum_k a_{n-k} \cdot b_k$

odkud již snadnou úpravou dostaneme požadované.