Diskrétní matematika – 12. týden
Příklady řešení rekurencí

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

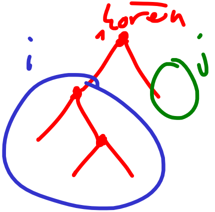
Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

S využitím standardních vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n tzv. pěstovaných binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*].

Catalanova čísla



0/2 následovníky

list

$n \geq 1$

$$C_n = C_0 C_{n-1} + \dots + C_{n-1} C_0$$

$$= \sum_{i+j=n-1} C_i C_j$$

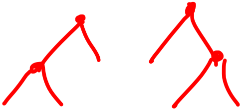
rekurence

S využitím standardních vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n tzv. pěstovaných binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

S využitím standardních vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n tzv. pěstovaných binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$



Dělením problému na levý a pravý strom dostaneme pro $n \geq 1$

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

S využitím standardních vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n tzv. pěstovaných binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Dělením problému na levý a pravý strom dostaneme pro $n \geq 1$

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

$b_0 = 0$ $+ [n=0]$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$: $(n-1)-i$ člen konvoluce $\{b_n\}$ a $\{b_n\}$

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1 (obecného postupu z minula).

$b_n = \sum_{i+j=n-1} b_i b_j + [n=0]$

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$\underline{B(x)} = \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n =$$

$$= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 =$$

konvoluce

$$= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.$$

posunutí

vytv. fce pro $[n=0]$

Pravá strana rekurence na prvním řádku je koeficientem u x^{n-1} v součinu $B(x) \cdot B(x)$, tj. členem u x^n v $xB(x)^2$.
Je tedy $xB(x)^2$ vytvořující po tutéž posloupnost jako $B(x)$ s výjimkou prvního členu u x^0.

$$xB(x)^2 - B(x) + 1 = 0$$

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

vzorec pro kvadr. rce

kořen

$$B(x) = x\, B(x)^2 + 1$$

$$C(x) = B(x) - 1 \implies B(x) = C(x) + 1$$

$$C(x) \cancel{+1} = x\,(C(x)+1)^2 \cancel{+1}$$

$$\frac{C(x)}{(C(x)+1)^2} = x \quad \text{---} \quad \text{inverzní formule}$$

$$f(u) = \frac{u}{(u+1)^2} \qquad \underline{g(x) = C(x)}$$

$$g_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{f(u)}\right)^n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](u+1)^{2n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \overset{\text{triv.}}{=} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

$1 - 2x + \cdots$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$. Naopak pro znaménko $-$ to tak dostaneme.

Pro vytvořující funkci $B(x)$ tedy platí

$$B(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady.

$\frac{1/2}{k} \cdot \frac{(-1/2)\cdot \ldots}{(k-1)\ldots}$

Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}(-4x)^k = 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2k}\binom{-1/2}{k-1}(-4x)^k$$

$= - \sum \frac{1}{2k}\binom{-1/2}{k-1}(-4x)^{k-1}$ $\quad \frac{(-4x)}{-2}$

a po vydělení $1-\sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$B(x) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{-1/2}{k-1}(-4x)^{k-1} =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}\frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$$

C_n

$k = n+1$

video-cvičení

$\binom{-1/2}{n} = \left(-1/4\right)^n \binom{2n}{n}$

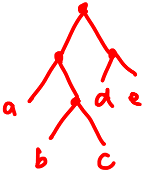
Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.

uzávorkování součinu čísel

s n operacemi.



$(a\cdot(b\cdot c))\cdot(d\cdot e)$ $\qquad C_4$

vnější aplikace.

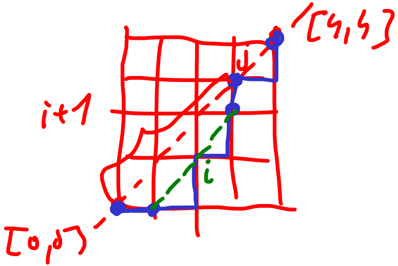
$C_4 = C_2\cdot C_1 + C_3\cdot C_0 + C_1\cdot C_2 + C_0\cdot C_3$

stejná rekurence

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.
Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu

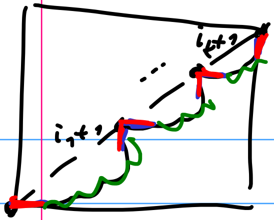


$$C_n = \sum C_i \cdot C_j$$

$$(i+1)+j = n$$

$$i+j = n-1$$

ta samá rekurence



$$\boxed{C_n = \sum_{i_1+\dots+i_k = n-k} C_{i_1} \cdots C_{i_k}}$$

jiná rekurence se stejným řešením

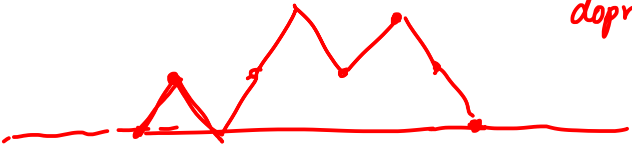
Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.
Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X

nahoru

doprava



Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.
Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet *monotónních* cest z $[0,0]$ do $[n,n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (n lidí má 5korunu a $\cancel{m}$ n 10korunu, lístek stojí 5 Kč.), že nezásobená pokladna může vždy vrátit

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.
Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet *monotónních* cest z $[0,0]$ do $[n,n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (n lidí má 5korunu a m 10korunu, lístek stojí 5 Kč.), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek

w_1 w_2 w_k

$(()())(())()$ $w_1, \ldots, w_k \to (w_1) \cdots (w_k)$

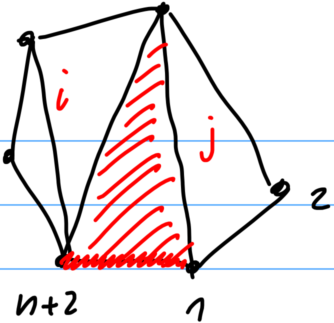
Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.
Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet *monotónních* cest z $[0,0]$ do $[n,n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (n lidí má 5korunu a m 10korunu, lístek stojí 5 Kč.), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet různých triangulací konvexního $(n+2)$-úhelníku.

triangulace $(n+2)$-úhlu

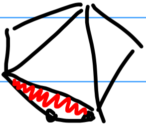
$= \underline{n}$ trojúhelníků



$i+j=n-1$

$$C_n = C_0\, C_{n-1} + \dots + C_{n-1}\, C_0$$

+



stejná rekurence

Plán přednášky

Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty[1].

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

[1] Používají se da ší typy vytvořujících funkcí (např. v teor číse se používají D r ch etovy vytvořující funkce, kde ro faktoru x^n hraje n^{-x}), a e těm se zde zabývat nebudeme.

Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty[1].

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

Poznámka

Jméno vychází z toho, že exponenciální funkce e^x je (exponenciální) vytvořující funkcí pro základní posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$.
V zápětí v důkazu Cayleyho věty uvidíme, že je použití exponenciálních vytvořujících funkcí výhodné.

[1] Používají se da ší typy vytvořujících funkcí (např. v teor číse se používají D r ch etovy vytvořující funkce, kde ro faktoru x^n hraje n^{-x}), a e těm se zde zabývat nebudeme.

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. derivování odpovídá posuvu doleva o jedno místo .

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. derivování odpovídá posuvu doleva o jedno místo .
- Integrování $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. odpovídá posuvu doprava o jedno místo.

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. derivování odpovídá posuvu doleva o jedno místo .
- Integrování $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. odpovídá posuvu doprava o jedno místo.
- Součin vytvořujících funkcí vytvořuje posloupnost se členy

$$c_n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} a_i b_j$$

Cayleyho formule

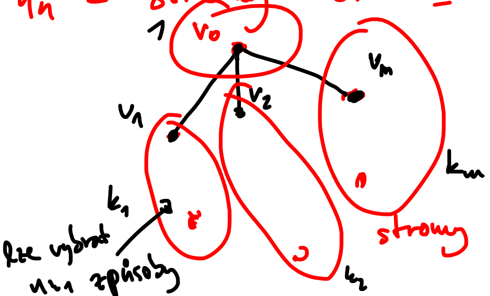
$$\boxed{u_n = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m \\ k_1+\dots+k_m = n-1}} \frac{n!}{1!\,k_1!\cdots k_m!} \cdot u_{k_1} \cdots u_{k_m}}$$

Cayleyho formule je vztah z kombinatorické teorie grafů, který udává, že počet stromů (tj. grafů, v nichž jsou libovolné dva vrcholy spojené právě jednou cestou) na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

$\frac{u_n}{n!}$

u_n = stromy na $\underline{n}$ vrcholech s kořenem v_0

+ uspořádání sousedů v_0



stromy na méně vrcholech

Cayleyho formule

Cayleyho formule je vztah z kombinatorické teorie grafů, který udává, že počet stromů (tj. grafů, v nichž jsou libovolné dva vrcholy spojené právě jednou cestou) na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.
Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Lze snadno spočítat, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3, t_4 = 16$. (Např. víme, že v případě stromů na 4 vrcholech musíme z $\binom{6}{3} = 20$ potenciálních grafů s právě 3 hranami odebrat ty možnosti, kde tyto hrany tvoří trojúhelník. Těch je ale právě $\binom{4}{3} = 4$).

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní. Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_m!} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní. Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{(n-1)!}{k_1!\cdots k_m!} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1 t_2 + t_1^3$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní. Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{(n-1)!}{k_1!\cdots k_m!} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1 t_2 + t_1^3$.
Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$ (uvědomte si přitom, že u_n udává počet tzv. kořenových stromů).

posunutí o 1 → (n-1)-í člen konvoluce $\{\frac{u_n}{n!}\}$ (1 - -) $\{\frac{u_n}{n!}\}$ mx

Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$.

$$\hat{u}(x) = \sum \frac{1}{m!} \left(x \cdot \hat{u}(x)^m \right)$$

$$= x \cdot \underbrace{\sum \frac{1}{m!} \hat{u}(x)^m}_{e^{\hat{u}(x)}}$$

$$= x \cdot e^{\hat{u}(x)}$$

exponenciální řada s dosaz. $\hat{u}(x)$

Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$. Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{U}(x) = x\, \mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}\,.$$

$$\frac{\hat{u}(x)}{e^{\hat{u}(x)}} = x$$

$$f(u) = \frac{u}{e^u} \qquad g(x) = \hat{u}(x)$$

$$f(g(x)) = \frac{\hat{u}(x)}{e^{\hat{u}(x)}} = x \qquad f \circ g = id$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = e^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = \mathrm{e}^{x\mathcal{E}(x)}$.

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k\geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.
Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = \mathrm{e}^{x\mathcal{E}(x)}$.
Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.
Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n}[x^n]\widehat{U}(x) = (n-1)![x^{n-1}]\mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$

Alternativní závěr výpočtu

Pokud vám přišel závěr výpočtu příliš umělý, zkusme to ještě jednou, s využitím tzv. Lagrangeovy inverzní formule:

Alternativní závěr výpočtu

Pokud vám přišel závěr výpočtu příliš umělý, zkusme to ještě jednou, s využitím tzv. Lagrangeovy inverzní formule:

Věta

Pokud vytvořující funkce $g(x) = \sum_{n\geq 1} g_n x^n$ *splňuje vztah*

$$x = f(g(x)),$$

$f(0) = 0 \quad f'(0) \neq 0$

$g(0) = 0 \quad g'(0) \neq 0$

kde $f(0) = 0, f'(0) \neq 0,$ *pak*

$$g_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{f(u)}\right)^n.$$

Alternativní závěr výpočtu

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$.

Alternativní závěr výpočtu

$$g_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{f(u)}\right)^n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](e^u)^n$$

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$. Odtud z Lagrangeovy formule

$$e^t = \sum \frac{1}{k!} t^k$$

$$e^{un} = \sum \frac{1}{k!} n^k \cdot u^k$$

$$k = n-1$$

$$[x^n]\widehat{U}(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{u/e^u}\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,\mathrm{e}^{un} = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

$$\hat{U}(x) = \sum \frac{u_n}{n!} x^n \Rightarrow u_n = n^{n-1}$$

stromy s vyzn. vrcholem

$$t_n = \frac{u_n}{n} = n^{n-2}$$

Alternativní závěr výpočtu

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$. Odtud z Lagrangeovy formule

$$
\begin{aligned}
[x^n]\widehat{U}(x) &= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{u/e^u}\right)^n \\
&= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,\mathrm{e}^{un} = \frac{1}{n}\,\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}
\end{aligned}
$$

Protože $\frac{u_n}{n!} = [x^n]\widehat{U}(x)$, dostáváme odtud

$$t_n = \frac{u_n}{n} = n^{n-2}.$$

Plán přednášky

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}.$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}.$
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2 C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2 R(x).$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2: $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:
$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$
- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj. $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lfloor \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rfloor.$$

Např. $c_{20} = 413403$.