

Optimalizace bez omezení

(unconstraint)

Nederivační (ad hoc) metody

Jednoduché metody

Nelder-Meadova (simplexová) metoda

Derivační metody

První derivace

Metoda největšího spádu + **další spádové metody**

Metoda konjugovaných gradientů

Druhá derivace

Newton-Raphsonova metoda

Quasi-Newtonova metoda

Spádové metody

- obecně

Jsou založeny na stejném principu jako metoda největšího spádu:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \cdot \mathbf{s}^{(k)}, \text{ kde:}$$

$\mathbf{s}^{(k)}$ je **směr přesunu** z bodu $\mathbf{x}^{(k)}$,

nejčastěji jako směr volíme $-\mathbf{g}^{(k)}$

α koeficient, popisující **délku daného přesunu**

Využívají sofistikovanější metody k určení koeficientu α .
Hodnota koeficientu α je různá pro každou iteraci.

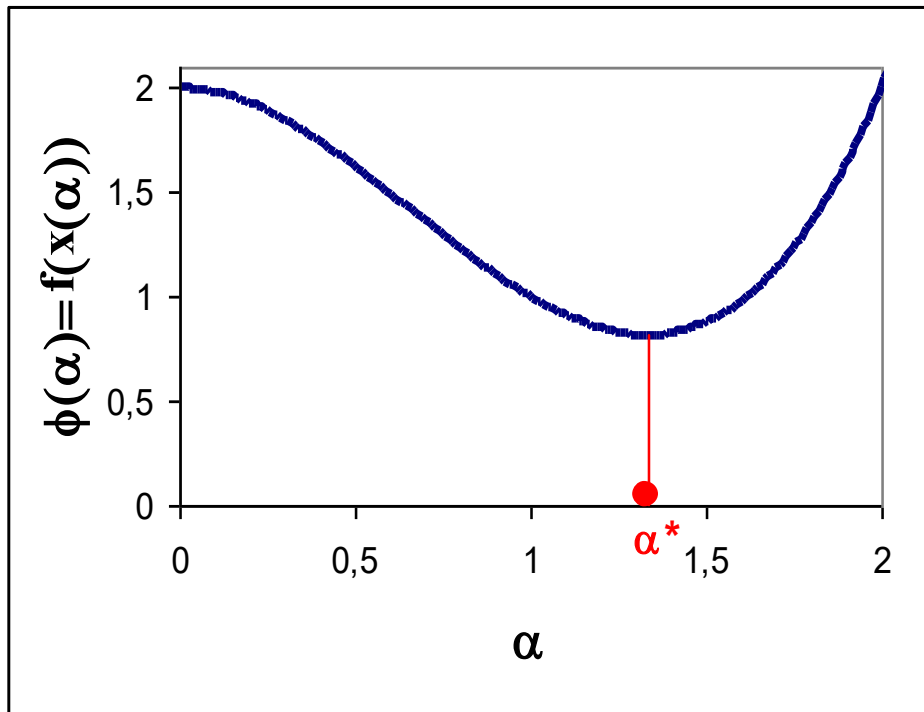
Spádové metody

- obecně II

Podmínka pro ideální hodnotu (α^*) koeficientu α :

funkce $\phi(\alpha) = f(x(\alpha))$ má v α^* minimum [1]

Poznámka: Jedná se o nejmenší hodnotu α , v níž má $\phi(\alpha)$ minimum. Navíc samozřejmě platí $\alpha > 0$.



Tuto podmínku nelze využít
k volbě koeficientu α .

Potřebujeme totiž určit
hodnotu α pro danou
iteraci v konečném a
pokud možno velmi
malém počtu kroků.

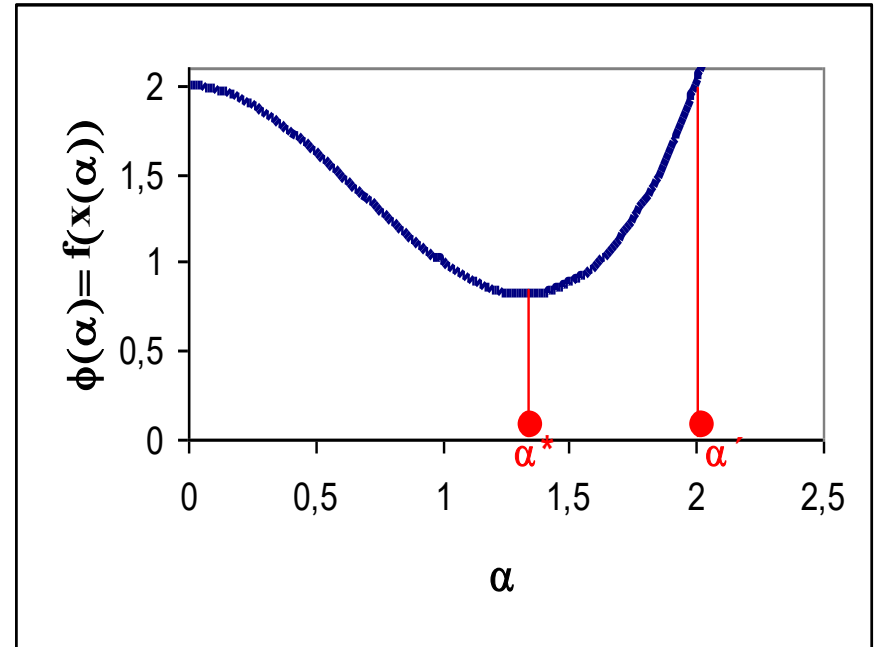
Spádové metody

- obecně III

Předpokládejme, že funkce f má průběh naznačený na obrázku.

Pak existuje $\alpha > 0$ tak, že:
$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{s}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

Nejmenší takové α označujeme α' .



\Rightarrow Nutné podmínky pro koeficient α :

$$0 < \alpha < \alpha'$$

[2]

Spádové metody

- obecně IV

=> Při volbě koeficientu α musíme dodržet podmínky [2] a co nejvíce se přiblížit podmínce [1].

Metody pro nalezení α :

- Goldsteinovy podmínky
- Wolfe-Powellovy podmínky

Značení:

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \alpha \cdot s^{(k)}) \quad \text{budeme značit } \phi(\alpha)$$

$$f(x^{(k)}) \quad \text{budeme značit } \phi(0)$$

Spádové metody

- Goldsteinovy podmínky I

1. Goldsteinova podmínka zaručuje, že α nebude zvoleno příliš blízko α' :

$$\phi(\alpha) \leq \phi(0) + \rho \cdot \alpha \cdot \phi'(0)$$

Parametr ρ je zde pevně zvolené číslo z intervalu $(0, \frac{1}{2})$.

I když α' neexistuje {tj. $\phi(\alpha) < \phi(0)$ pro všechna $\alpha > 0$ }, je 1GP schopna omezit volbu $\alpha^{(k)}$. (Pokud je tedy funkce f zdola omezená.)

Spádové metody

- Goldsteinovy podmínky II

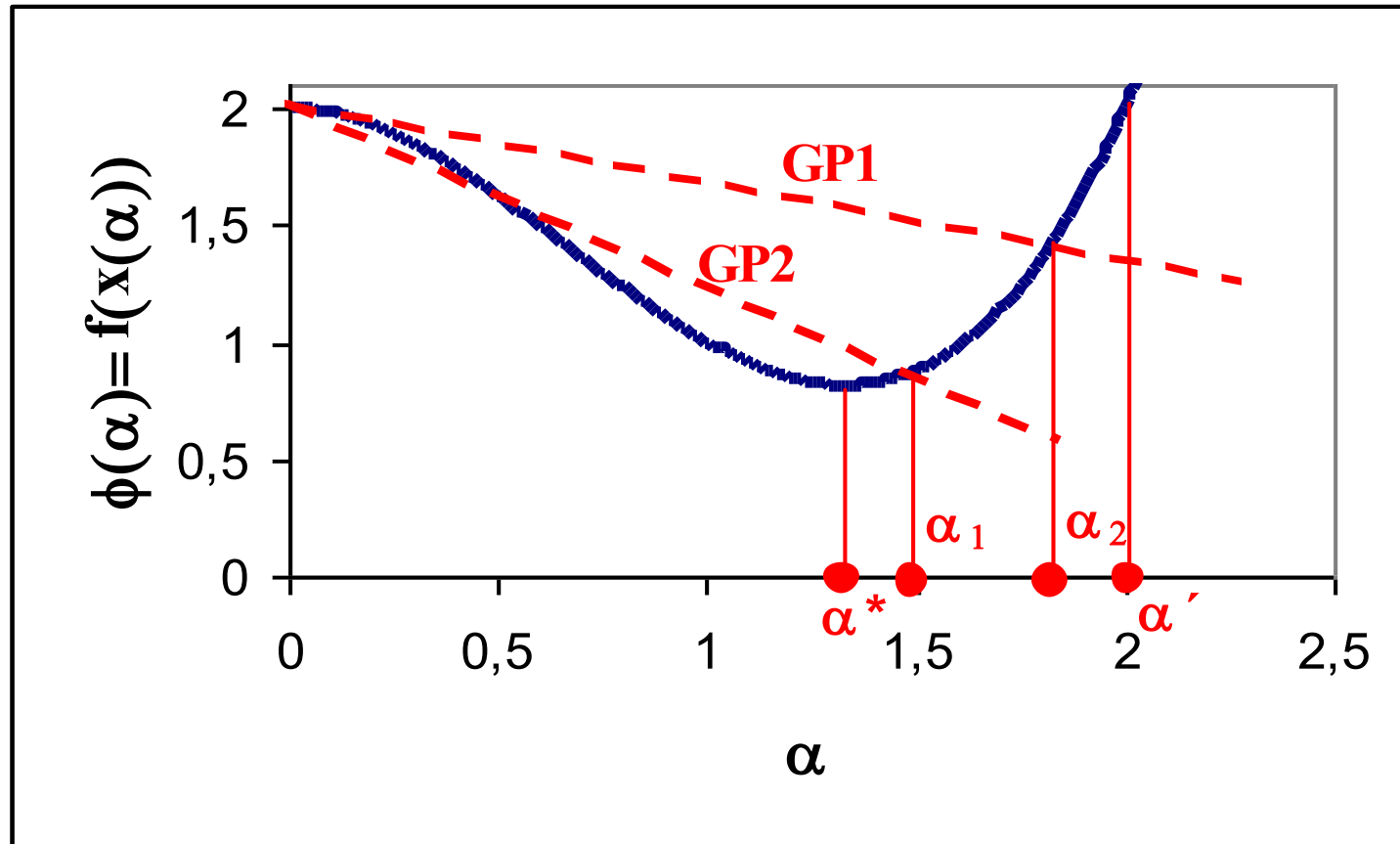
2. Goldsteinova podmínka zaručuje, že α nebude zvoleno příliš blízko 0:

$$\phi(\alpha) \geq \phi(0) + (1 - \rho) \cdot \alpha \cdot \phi'(0)$$

Pravé strany Goldsteinových podmínek určují dvě přímky se zápornou směrnici. Hodnoty α_1 a α_2 , které přísluší průsečíkům těchto přímek s $\phi(\alpha)$, určují interval vhodných hodnot α .

Spádové metody

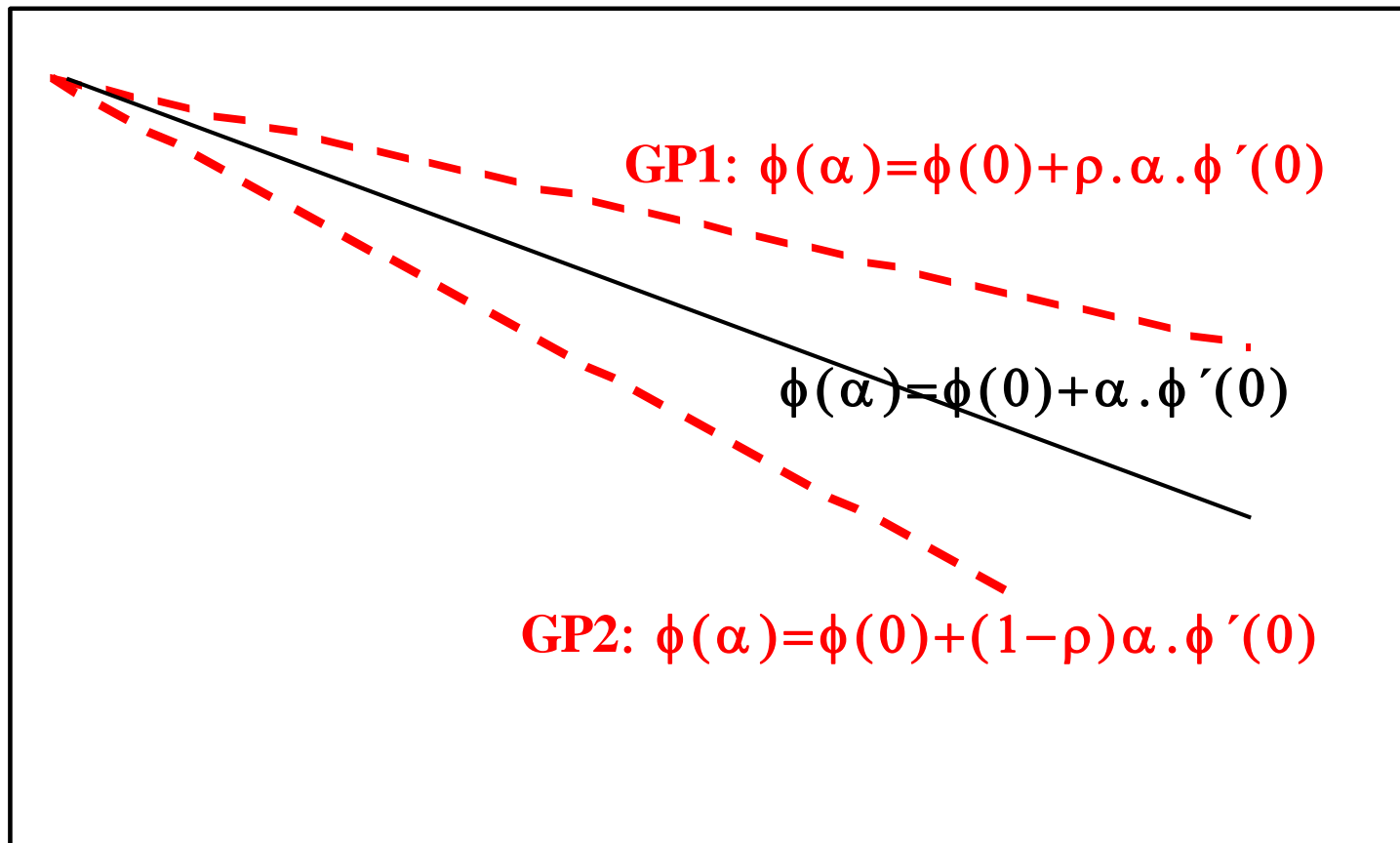
- Goldsteinovy podmínky III



Spádové metody

- Goldsteinovy podmínky IV

Zdůvodnění Goldsteinových podmínek:



Spádové metody

- Goldsteinovy podmínky V

Věta: Necht' funkce f je spojitě diferenciovatelná a necht' její gradient $\mathbf{g} = \nabla f$ je lipschitzovsky spojitý na \mathbb{R}^n .

Je-li $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ posloupnost generována spádovou metodou a volba α vyhovuje Goldsteinovým podmínkám, pak platí:

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^{(k-1)}) \geq -\rho \cdot \mathbf{g}^{(k)} \cdot \delta^{(k)}$$

$$\text{kde } \delta^{(k)} = \alpha^{(k)} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$$

\Rightarrow Metoda vždy konverguje k minimu funkce f (pro vhodné ρ).

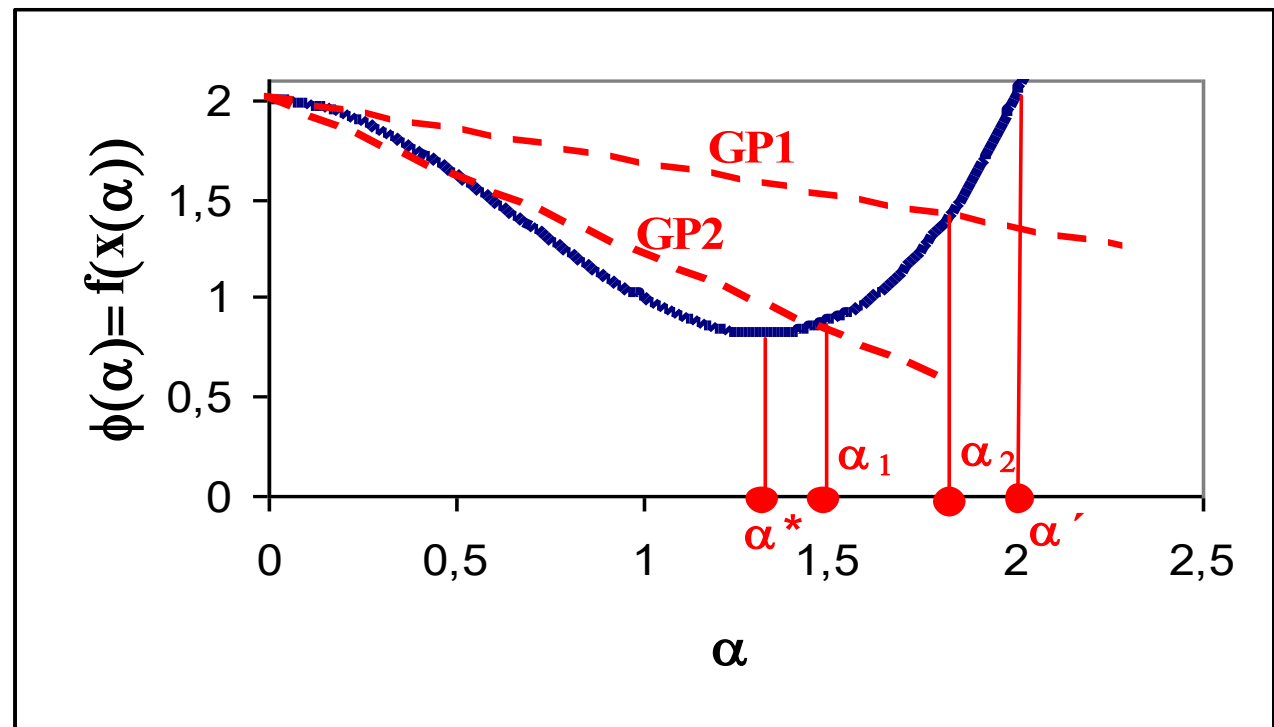
Poznámka: Volba koeficientu $\rho < 1/2$ zaručuje konvergenci metody pro kvadratické funkce.

Spádové metody

- Goldsteinovy podmínky VI

Nevýhoda Goldsteinových podmínek:

V intervalu mezi α_1 a α_2 se nemusí nacházet minimum funkce $\phi(\alpha)$.



Spádové metody

- Wolfe-Powellovy podmínky

Místo GP2 se testuje sklon funkce $\phi(\alpha)$ v bodě α .

Využívá se tedy následující podmínka:

$$|\phi'(\alpha)| \leq \sigma |\phi'(0)|$$

kde $\sigma \in (\rho, 1)$.

Spádové metody

- Wolfe-Powellovy podmínky II

