

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - teorie*

DEF:

Množina  $S \subset \mathbb{R}^n$  je **konvexní**, pokud  $\forall x_1, x_2 \in S$ :

$\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \in S$  pro každé  $\lambda \in [0, 1]$ .

DEF:

Bod  $\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$  pro  $\lambda \in [0, 1]$  se nazývá **konvexní kombinací**  $x_1$  a  $x_2$ .

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - teorie II*

DEF:

**Konvexní obal množiny  $S$**  je nejmenší konvexní množina obsahující  $S$ . Označuje se **conv(S)**.

DEF:

Množina  $P \subset \mathbb{R}^n$  je **konvexní polyedr**, pokud  $P$  je konvexním obalem konečné množiny.

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - teorie III*

DEF:

**Simplex** je konvexní polyedr  $P = \text{conv} \{v_0, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  
kde  $v_m - v_0, \dots, v_1 - v_0$  jsou lineárně nezávislé. Pokud  
tedy  $m = n$ , jde o konvexní obal  $n + 1$  bodů s  
nenulovým objemem v  $\mathbb{R}^n$ .

DEF:

**Polyedrická množina** je průnikem konečného počtu  
poloprostorů (lze je zapsat ve tvaru  $\{x \in \mathbb{R}^n; a^T x \geq \alpha\}$ ,  
kde  $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ ).

Je zřejmé, že množina přípustných řešení každé úlohy  
lineárního programování je polyedrická.

# *Lineární programování*

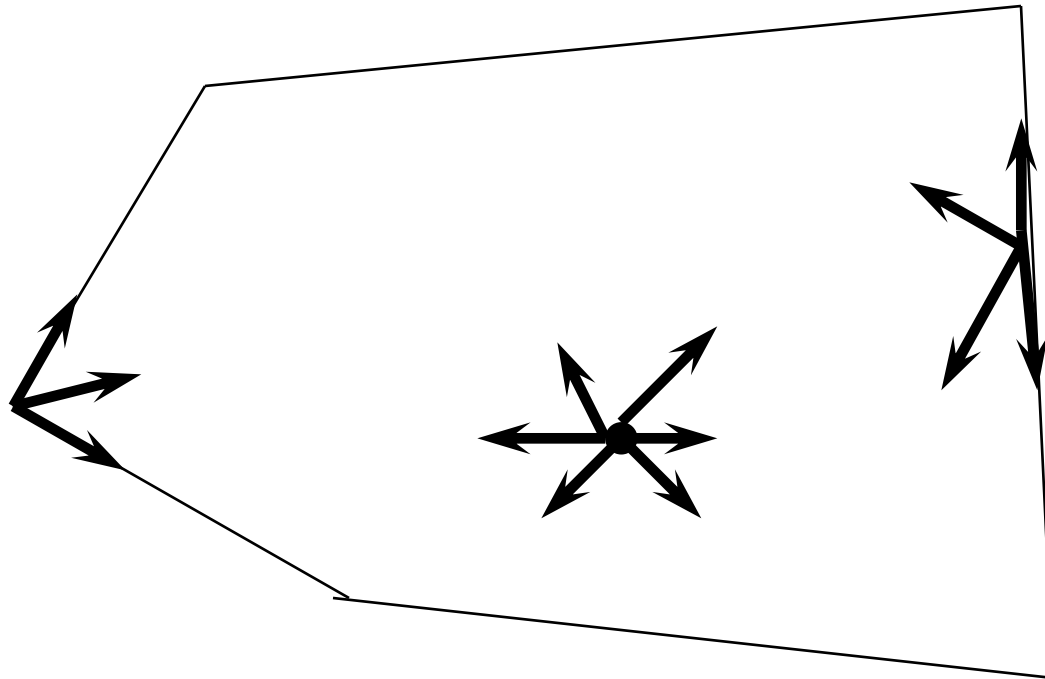
*- simplexová metoda - teorie IV*

DEF: **Krajní bod** konvexní množiny  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  je prvek  $S$ , který není netriviální konvexní kombinací dvou různých bodů z  $S$ . Neexistuje  $y_1, y_2 \in S, y_1 \neq y_2, \lambda \in (0, 1): x = \lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2$ .

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - teorie IV*

DEF: **Směr** (v bodě  $x \in S$ ) v uzavřené konvexní množině  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  je takový nenulový vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ , pro který  $\exists \alpha > 0: x + \alpha \cdot d \in S$ .

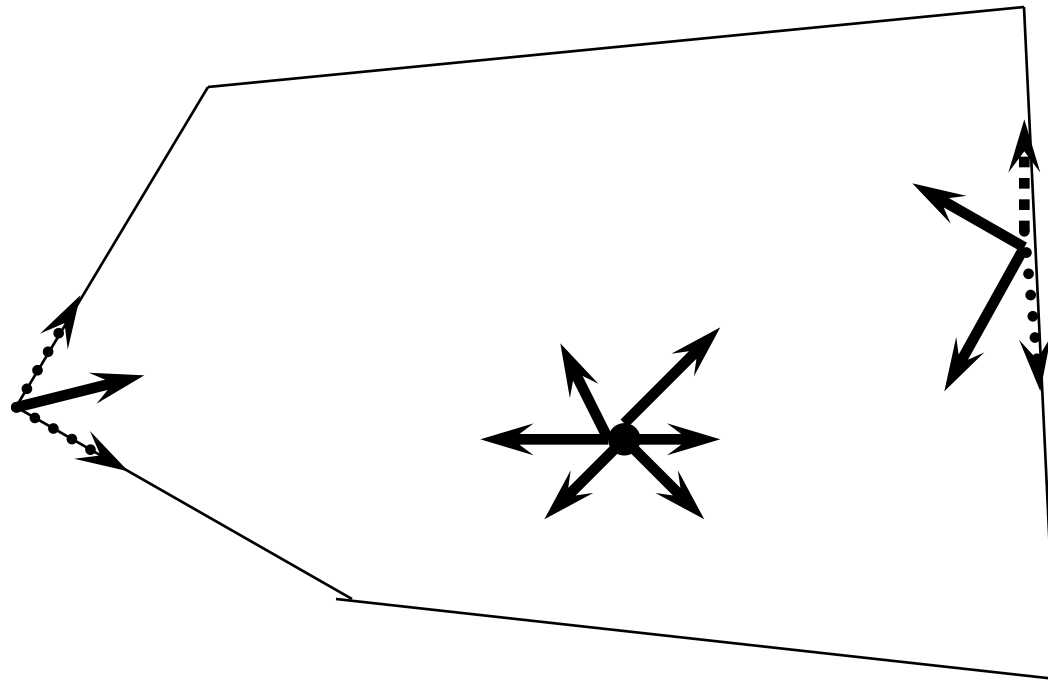


# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - teorie V*

DEF:

**Krajní směr** je směr, který není kladnou lineární kombinací dvou různých směrů.



# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - teorie VI*

Věta:

Kladná lineární kombinace směrů je opět směrem:

Je-li  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ :

$$x + \alpha_1 \cdot d_1 \in S$$

$$\Rightarrow x + \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2 \in S$$

$$\Rightarrow x + \beta \cdot (\alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2) \in S \text{ pro } \beta \geq 0.$$

DEF:

**Krajní směr** je směr, který není kladnou lineární kombinací dvou různých směrů.

# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů*

Necht'  $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $h(A) = m$ .

$x \in S$  je krajní bod  $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  po permutaci sloupců matice  $A$  (a odpovídajících složek vektoru  $x$ ) lze matici  $A$  vyjádřit jako  $A = (B \mid N)$ , tak že platí:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

kde  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je regulární a  $B^{-1} \cdot b \geq 0$ .



# *Lineární programování*

*- vlastnosti krajních bodů*

Necht'  $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \neq \emptyset$ .

Pak platí:

- a) Existuje krajní bod množiny  $S$ .
- b) Každý krajní bod množiny  $S$  má nejvýše  $m$  kladných složek.
- c) Množina  $S$  má nejvýše  $\binom{n}{m}$  krajních bodů.

# Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad

Příklad:

$$\max 4x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

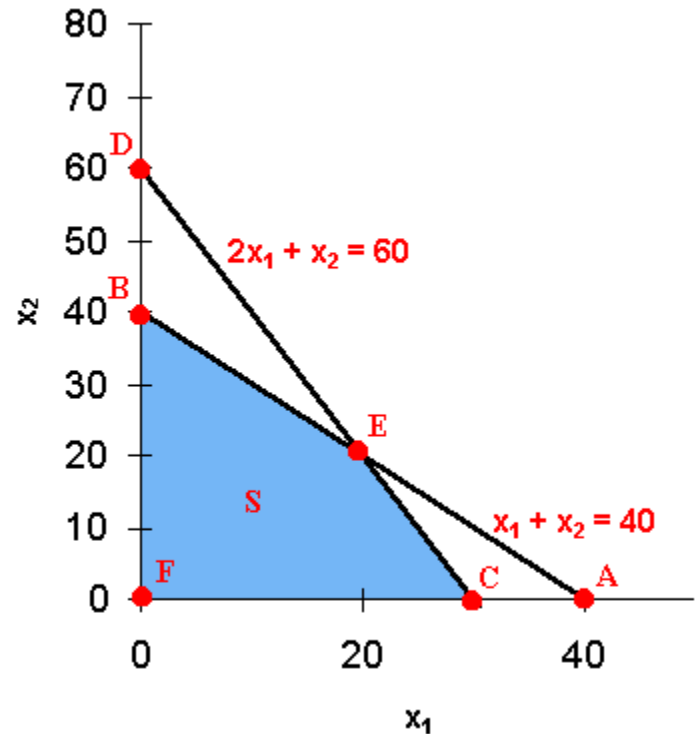
$$2x_1 + x_2 \leq 60$$

Přepis rovnic na standardní tvar:

$$\min (-4 \quad -3 \quad 0 \quad 0) \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$



# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů - příklad*

Příklad:

$$\max 4x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 60$$

Přepis rovnic na standardní tvar:

$$\min (-4 \quad -3 \quad 0 \quad 0) \cdot \mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů - příklad II*

Následující tabulka uvádí přehled **bázických proměnných**  $x_B$  (zbylé proměnné  $x_N$  označujeme jako **nebázické proměnné**), **bázickou matici B** a odpovídající **bázické řešení x**.

Dále je uvedeno, zda je bázické řešení přípustné tj. splňuje  $x \geq 0$  (zkratka **BFS** značí **basic feasible solution**).

Nakonec uvádíme, kterým bodům grafu přísluší daná bázická řešení, zda se jedná o krajní body a kterými omezeními jsou body určeny.

# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů - příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	B	x	BFS	graf	krajní	omezení

# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů - příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů - příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$				

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

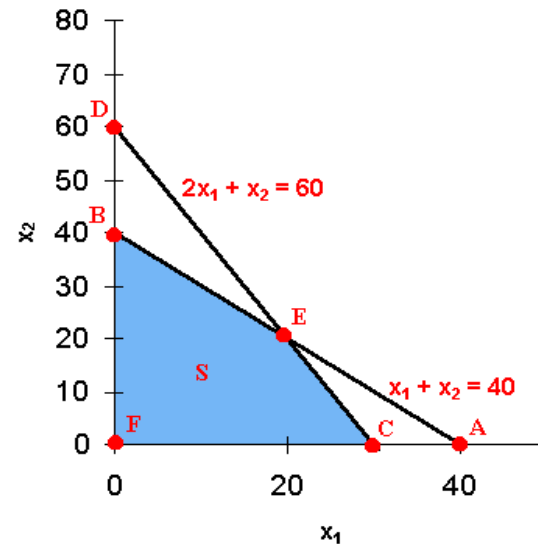
# Lineární programování

## - charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

$X_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano			

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$





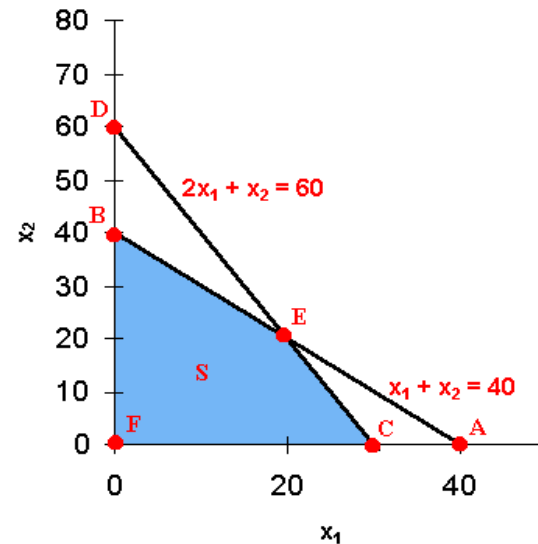
# Lineární programování

## - charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E		

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



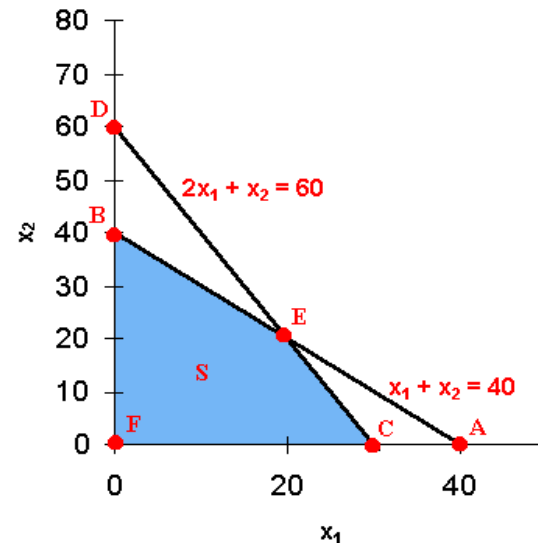
# Lineární programování

## - charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E	ano	

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



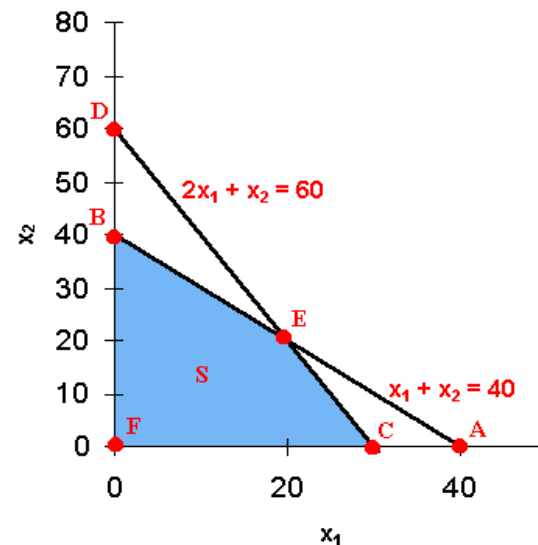
# Lineární programování

## - charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E	ano	AEB, CED

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

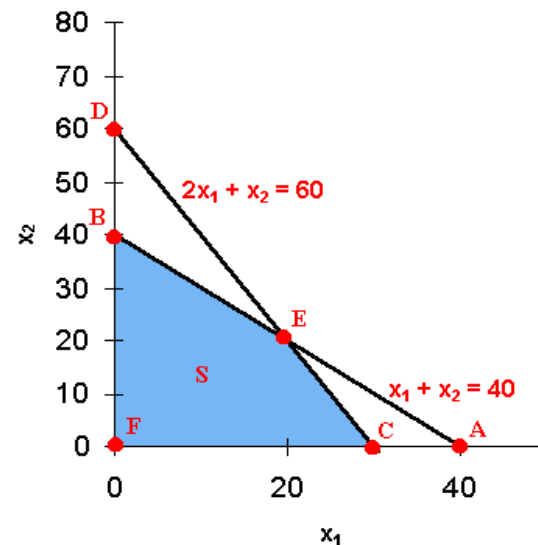


# Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

$X_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$X_1, X_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E	ano	AEB, CED
$X_1, X_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$					



# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních bodů - příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E	ano	AEB, CED
$x_1, x_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$(30 \ 0 \ 10 \ 0)$	ano	C	ano	CED, ACF
$x_1, x_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

# *Lineární programování*

## *- charakteristika krajních bodů - příklad III*

Tabulka bázických proměnných:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_1, x_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E	ano	AEB, CED
$x_1, x_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$(30 \ 0 \ 10 \ 0)$	ano	C	ano	CED, ACF
$x_1, x_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(40 \ 0 \ 0 \ -10)$	ne	A	ne	ABD, ACF

# *Lineární programování*

## *- charakteristika krajních bodů - příklad IV*

Tabulka bázických proměnných - 2. část:

$x_B$	$B$	$x$	BFS	graf	krajní	omezení
$x_2, x_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$					
$x_2, x_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$					
$x_3, x_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					

# *Lineární programování*

## *- charakteristika krajních bodů - příklad IV*

Tabulka bázických proměnných - 2. část:

$x_B$	<b>B</b>	<b>x</b>	<b>BFS</b>	<b>graf</b>	<b>krajní</b>	<b>omezení</b>
$x_2, x_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(0 \ 60 \ -20 \ 0)$	ne	<b>D</b>	ne	CED, DBF
$x_2, x_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$(0 \ 40 \ 0 \ 20)$	ano	<b>B</b>	ano	AEB, DBF
$x_3, x_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(0 \ 0 \ 40 \ 60)$	ano	<b>F</b>	ano	DBF, ACF



# *Lineární programování*

*- charakteristika krajních směrů*

Necht'  $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $h(A) = m$ .

$d \in \mathbb{R}^n$  je krajní směr v  $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  po permutaci sloupců matice  $A$  (a odpovídajících složek vektoru  $x$ ) lze matici  $A$  vyjádřit jako  $A = (B \mid N)$ , tak že  $B^{-1} \cdot a_j \leq 0$  pro některý sloupec  $a_j$  matice  $N$  a platí:

$$d = \alpha \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$$

kde  $\alpha > 0$  a  $e_j = (\varepsilon_{j,1}, \dots, \varepsilon_{j,n-m})$  a dále  $\varepsilon_{j,j} = 1$  a  $\varepsilon_{j,i} = 0$  pro  $i \neq j$ .

# *Lineární programování*

*- vlastnosti krajních směrů*

Nechť  $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \neq \emptyset$ .

Pak platí:

Množina  $S$  má nejvýše  $\binom{n}{m}^{(n-m)}$  krajních směrů.

# *Lineární programování*

## *- věta o reprezentaci*

Věta o reprezentaci:

Necht'  $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \neq \emptyset$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $h(A) = m$   
a necht'  $x_1, \dots, x_k$  jsou všechny krajní body  $S$  a  $d_1, \dots, d_l$   
všechny krajní směry  $S$ .

Pak platí  $x \in S \Leftrightarrow$

$\exists \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \exists \mu_j \geq 0$  tak, že:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

# *Lineární programování*

## *- základní věta LP*

Základní věta lineárního programování:

Mějme úlohu lineárního programování ve standardním tvaru,  $h(A) = m$ ,  $S \neq \emptyset$ . Necht'  $x_1, \dots, x_k$  jsou všechny krajní body  $S$  a  $d_1, \dots, d_l$  všechny krajní směry  $S$ .

Pak existuje  $\min\{c^T x; x \in S\} \Leftrightarrow$

$$c^T d_j \geq 0 \quad \text{pro } \forall j = 1, \dots, l$$

Jestliže existují optimální řešení, pak existuje mezi nimi alespoň jeden krajní bod.

# *Lineární programování*

*- metody nalezení minima*

- Přímá metoda
- Simplexová metoda.

Přímá metoda:

- najdeme všechny krajní body
- spočítáme hodnotu účelové funkce pro tyto body
- má-li úloha optimální řešení, je jím krajní bod s největší hodnotou účelové funkce

# *Lineární programování*

## *- přímá metoda*

Problém při této metodě spočívá v tom, že počet krajních bodů s rostoucím počtem proměnných rychle narůstá:

$N$  proměnných  $\Rightarrow 2^N$  kandidátů na krajní bod

Vyhledat všechny krajní body znamená vybrat z matice  $A$  všechny regulární submatice řádu  $m$  a vyřešit pro každou z nich soustavu:

$$B \cdot x_B = b$$

Pokud je její řešení nezáporné, získali jsme (po doplnění nulovými složkami) krajní bod množiny  $M$ .

# *Lineární programování*

## *- přímá metoda 2*

Takový postup je numericky schůdný jen pro úlohy malé dimenze.

Navíc nemáme předem zaručenou existenci optimálního řešení, takže nalezené nejlepší základní řešení nemusí být řešením optimálním.

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip*

Prochází krajní body množiny přípustných řešení jistým racionálním způsobem (například nikdy nepřejde do bodu s vyšší funkční hodnotou).

Způsob procházení množiny přípustných řešení lze snadno popsat geometricky:

- Předpokládejme, že máme krajní bod  $x_0$  množiny přípustných řešení  $M$ .
- Z tohoto krajního bodu vychází konečné množství hran množiny  $M$ , z nichž každá buď obsahuje buď jediný další krajní bod množiny  $M$ , nebo je neomezená.



# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip II*

- Jestliže na některé neomezené hraně existuje bod, pro který je hodnota účelové funkce nižší než  $c^T x_0$ , nemá úloha optimální řešení a postup končí.
- V opačném případě hledáme sousední krajní bod, pro který je hodnota kriteriální funkce nižší než  $c^T x_0$ .
- Necht' je to krajní bod  $x_1$ . Pak stejný postup, který jsme dosud aplikovali na bod  $x_0$ , aplikujeme nyní na bod  $x_1$ .
- Pokud neexistuje sousední krajní bod s vlastností  $c^T x > c^T x_0$ , je  $x_0$  hledaným optimálním řešením.

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip III*

Princip:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N), \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^{m-n}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \mid \mathbf{N}), \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}, \mathbf{B} \text{ je regulární}$$

Krok metody = výměna jedné nebázové proměnné (z  $\mathbf{x}_N$ ) za bázovou proměnnou (z  $\mathbf{x}_B$ ) tak, aby  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  kleslo.

Výměna znamená, že tato dosud bázová proměnná pak bude mít hodnotu 0, a ta dosud nebázová nějakou kladnou hodnotu  $\Rightarrow$  budeme opět v krajním bodě.

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip IV*

- Jak vybrat nebázovou proměnnou, kterou přesuneme do báze?

Pomocí redukovaného cenového vektoru :-).

Odvození vztahu pro redukovaný cenový vektor:

=> Vyjádříme  $c^T x$  za předpokladu  $Ax = b$  pouze pomocí proměnné  $x_N$ .

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - princip V*

=> Vyjádříme  $c^T x$  za předpokladu  $Ax = b$  pouze pomocí proměnné  $x_N$ .

$$\text{Platí: } (B \mid N) (x_B, x_N)^T = b$$

$$\Rightarrow B \cdot x_B + N \cdot x_N = b$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1} \cdot (b - N \cdot x_N)$$

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T \cdot x_B + c_N^T \cdot x_N = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot (b - N \cdot x_N) + c_N^T \cdot x_N = \\ &= c_B^T \cdot B^{-1} \cdot b + (c_N - N^T \cdot B^{-T} \cdot c_B)^T \cdot x_N = \\ &= \text{konst.} + d_N \end{aligned}$$

kde  $d_N$  je **redukovaný cenový vektor**

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip VI*

Pokud jsou všechny složky  $x_B$  kladné a některá složka (například  $d_{N,i}$ ) vektoru  $d_N$  záporná, můžeme snížit hodnotu  $c^T x$  tím, že do  $x_B$  přesuneme  $x_{N,i}$ .

Teoreticky můžeme zvolit libovolnou složku  $x_{N,i}$  s  $d_{N,i} < 0$ .

Pokud neexistuje v  $d_N$  záporná složka, aktuální bod  $x$  je minimem.

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip VII*

Pokud je zde více než jedna záporná složka, pak v ideálním případě zvolíme tu složku, která vede k největšímu poklesu  $c^T x$ .

Existuje mnoho heuristik pro výběr vhodné složky. Například Dantzigovo pravidlo:

Zvolte tu složku  $d_N$ , která má co největší zápornou hodnotu.

# *Lineární programování*

## *- simplexová metoda - princip VIII*

Pokud máme vybrán index  $i$  složky vektoru  $x_N$ , kterou přesuneme do báze, musíme vypočítat hodnotu  $x_{N,i}$ :

$$x_{N,i} = \min_{j=1\dots m} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_j}{(B^{-1}N_i)_j} : (B^{-1}N_i)_j > 0 \right\}$$

Pomocí této hodnoty můžeme dopočítat  $x_B$ :

$$x_B = B^{-1} \cdot (b - N_i \cdot x_{N,i})$$

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - algoritmus*

0) Najdi nějaký krajní bod  $x = (x_B, x_N)$ ,  $x_N = 0$  a  $Ax = b$ .

1) Vypočítej redukovaný cenový vektor:

$$d_N = (c_N - N^T \cdot B^{-T} \cdot c_B)^T$$

Pokud  $d_N \geq 0$ , pak jsme v minimu

jinak zvol  $i$  tak, aby  $d_i = \min_k d_k$

2) Vypočítej  $x_{N,i}$  a  $x_B$ .

3) Pro první  $j$ , pro které  $x_{B,j} = 0$  vyměň  $x_{N,i}$  a  $x_{B,j}$ .

4) Jdi na 1).



# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - dvoufázová*

ad 0): Pro výběr prvního krajního bodu lze rovněž využít minimalizační algoritmus  $\Rightarrow$  tzv. **dvoufázová metoda**.

I) Řešení pomocné úlohy:

$$\min \sum_{i=1}^m r_i \text{ za předpokladu } r = Ax - b, x \geq 0, r \geq 0$$

II) Řešení  $\min c^T x$  za předpokladu  $Ax = b, x \geq 0$ .

# *Lineární programování*

- *simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka*

Při ručním řešení úloh se velmi dobře osvědčuje uspořádání výpočtů do tzv. *simplexové tabulky*, která obsahuje koeficienty soustavy **m+1** lineárních rovnic ve standardním tvaru o **n+1** neznámých.

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka*

	$f(x)$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	
$x_{k1}$						
$\dots$						
$x_{km}$						
$f(x)$						

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka*

Do hlavičky simplexové tabulky píšeme označení všech proměnných (první z nich je proměná  $f(x)$ ).

Do prvního sloupce píšeme označení proměnných, které tvoří v příslušném kroku zkoumaný krajní bod (= tzv. základní řešení).

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II*

Do posledního sloupce píšeme pravé strany soustavy lineárních rovnic.

Poslední řádka odpovídá rovnici pro účelovou funkci.

Vstupující proměnné odpovídá v tabulce tzv. **klíčový sloupec**.

Řádek, obsahující vystupující proměnnou, je **klíčový řádek**.

Prvek ležící v průsečíku klíčového řádku a klíčového sloupce nazveme **klíčovým prvkem**.

# Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - iniciace

Mějme úlohu LP ve  
standardním tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ M \\ b_m \end{pmatrix}$$
$$(c_1 \quad c_2 \quad \Lambda \quad c_n) \cdot \mathbf{x} = f(\mathbf{x})$$

Do simplexové tabulky  
ji zapíšeme takto:

	$f(\mathbf{x})$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	
$x_{k1}$	0	$a_{11}$	$a_{21}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
:	:	:	:		:	:
$x_{km}$	0	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	$b_m$
$f(\mathbf{x})$	1	$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	0

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - výpočet*

Kritérium pro to, zda je řešení optimální, dává řádka  $f(x)$ . Pokud obsahuje záporné koeficienty, není řešení optimální.

Vstupující proměnná (proměnná, která se přidá do báze) je ta, která má největší zápornou hodnotu v posledním řádku.

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II*

Vystupující proměnnou určíme tak, že dělíme postupně čísla v posledním sloupci tabulky čísly z klíčového sloupce, pokud jsou tato čísla kladná. Zvolíme tu proměnnou, pro niž vyjde nejmenší hodnota.

**V dalším řešení postupujeme takto:**

V prvním sloupci nahradíme označení vystupující proměnné označením vstupující proměnné.



# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II*

Prvky v řádku vstupující proměnné dostaneme tak, že dělíme prvky klíčového řádku klíčovým prvkem

Prvky v ostatních řádcích dostaneme tak, že od každého řádku odečteme takový násobek řádu vstupující proměnné, aby v klíčovém sloupci byly nuly (kromě jedničky v řádku vstupující proměnné)

# Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Nalézt maximum funkce:  $f(x) = 4x_1 + 2x_2$

Za podmínek:  $-x_1 + 3x_2 \leq 9$ ;  $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$2x_1 - x_2 \leq 10$ ;  $x_1, x_2 \geq 0$

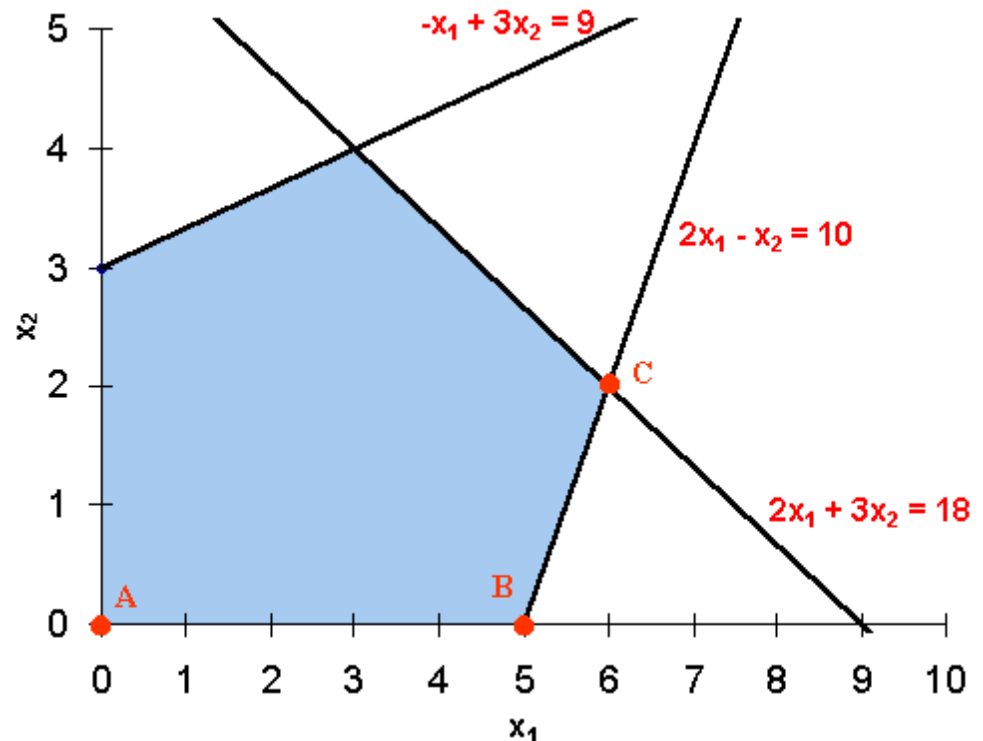
Standardní tvar rovnic:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$$

$$f(x) - 4x_1 - 2x_2 = 0$$



# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - příklad*

Standardní tvar rovnic:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9; \quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10; \quad f(x) - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

Do simplexové  
tabulky je  
zapíšeme  
takto:

I.	f(x)	<b>x<sub>1</sub></b>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	
x <sub>3</sub>	0	<b>-1</b>	3	1	0	0	9
x <sub>4</sub>	0	<b>2</b>	3	0	1	0	18
<b>x<sub>5</sub></b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>10</b>
f(x)	1	<b>-4</b>	-2	0	0	0	0

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - příklad*

Do simplexové  
tabulky je  
zapíšeme  
takto:

I.	f(x)	<b>x<sub>1</sub></b>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	
x <sub>3</sub>	0	<b>-1</b>	3	1	0	0	9
x <sub>4</sub>	0	<b>2</b>	3	0	1	0	18
<b>x<sub>5</sub></b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>10</b>
f(x)	1	<b>-4</b>	-2	0	0	0	0

Výchozí základní řešení:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 9, x_4 = 18, x_5 = 10, f(x) = 0$$

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - příklad*

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

II.	f(x)	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	
x <sub>3</sub>	0	0	5/2	1	0	1/2	14
x <sub>4</sub>	0	0	4	0	1	-1	8
x <sub>1</sub>	0	1	-1/2	0	0	1/2	5
f(x)	1	0	-4	0	0	2	20

Výchozí základní řešení:

$$x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 14, x_4 = 8, x_5 = 0, f(x) = 20$$

# *Lineární programování*

*- simplexová metoda - praxe - příklad*

Do simplexové  
tabulky je  
zapíšeme  
takto:

III.	f(x)	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	
x <sub>3</sub>	0	0	0	1	-5/8	9/8	9
x <sub>4</sub>	0	0	1	0	1/4	-1/4	2
x <sub>1</sub>	0	1	0	0	1/8	3/8	6
f(x)	1	0	0	0	1	1	28

Optimální řešení:

$$x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 9, x_4 = 0, x_5 = 0, f(x) = 28$$

# Cvičení

## - příklad 1

Nalezněte krajní body množiny přípustných řešení úlohy:

Nalézt maximum funkce:

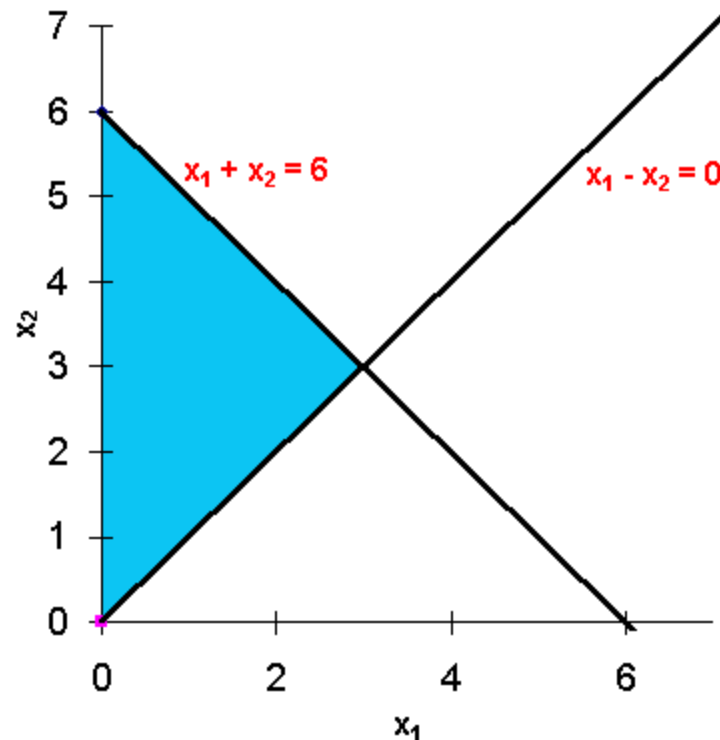
$$f(x) = 15x_1 + 2x_2$$

Za podmínek:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_i \geq 0$$



# *Cvičení*

## *- příklad 2*

Nalézt maximum funkce:

$$f(\mathbf{x}) = 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 25x_4$$

Za podmínek:

$$2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 5000$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 6000$$

$$10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \leq 18000$$

$$x_i \geq 0$$