

Minimalizace součtu čtverců

- úvod

Optimalizuje teoretický model tak, aby co nejvíce odpovídal naměřeným datům.

=> Minimalizuje odchylku modelu od naměřených hodnot.

Využití:

Všude, kde máme co do činění s analýzou nějakého přírodního nebo technického systému.

Minimalizace součtu čtverců

- úvod II

Naměřená data si můžeme představit jako dvojice:

$$(\mathbf{t}_i, y_i), \quad i = 1, \dots, m$$

kde:

$\mathbf{t}_i \in \mathbb{R}^k$ bod měření (například čas nebo místo měření
nebo obojí)

y_i hodnota, naměřená v \mathbf{t}_i

Minimalizace součtu čtverců

- úvod III

Dále pak máme nějaký **matematický model M**:

$\mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}$, který je závislý na **n volných parametrech**
 x_1, x_2, \dots, x_n a pro který požadujeme, aby:

$$M(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}) \approx y_i$$

kde:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$i = 1, \dots, m$$

(**m** je tedy počet naměřených bodů, se kterými
budeme pracovat)

Minimalizace součtu čtverců

- úvod IV

V úlohách tohoto typu tedy pro m -prvkovou množinu naměřených bodů (\mathbf{t}_i, y_i) hledáme parametry x_1, \dots, x_n modelu M tak, aby daný model co možná nejlépe popisoval tuto množinu.

\Rightarrow Minimalizujeme odchylku modelu od naměřených dat.

Minimalizace součtu čtverců

- příklad

Ohmův zákon

Data: $((U_i), I_i)$ kde U_i je napětí na svorkách rezistoru a I_i je proud, který prochází rezistorem

Model: Obecně: $M(\mathbf{t}_i, \mathbf{x})$ pro data (\mathbf{t}_i, y_i)

$$\text{Konkrétně: } M((U_i), (R)) = \frac{U_i}{R}$$

Parametry modelu: $\mathbf{x} = (R)$, kde R je odpor rezistoru.

Minimalizace součtu čtverců

- příklad II

Radioaktivní rozpad

Data: $((t_i), N_i)$ kde t_i je čas od počátku měření a N_i je počet atomů v čase t_i

Model: Obecně: $M(\mathbf{t}_i, \mathbf{x})$ pro data (\mathbf{t}_i, y_i)

$$\text{Konkrétně: } M((t_i), (N_0, T)) = N_0 \cdot e^{-\frac{t_i}{T \cdot \ln 2}}$$

Parametry modelu: $\mathbf{x} = (N_0, T)$, kde N_0 je počet atomů v čase 0 a T je poločas rozpadu.

Minimalizace součtu čtverců

- příklad III

Potenciální energie molekuly

Data: $((s_1, \dots, s_n), E_{\text{pot}})$ kde s_1, \dots, s_n jsou souřadnice jednotlivých atomů molekuly a E_{pot} je potenciální energie molekuly

Model: Obecně: $M(\mathbf{t}_i, \mathbf{x})$ pro data (\mathbf{t}_i, y_i)

Konkrétně:

$$M((s_1, \dots, s_n), (\dots)) = E_{\text{bn}} + E_{\text{an}} + E_{\text{tor}} + E_{\text{vdw}} + E_{\text{el}}$$

Parametry modelu: je jich velmi mnoho – ideální vazebné vzdálenosti, vazebné úhly a torzní úhly, konstanty úměrnosti, atd ...

Minimalizace součtu čtverců

- obecně

Chceme minimalizovat odchylku modelu od naměřených dat =>

Chceme tedy, aby hodnoty rozdílů

$$r_i(\mathbf{x}) = M(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}) - y_i$$

byly v absolutní hodnotě co nejmenší.

To se dá interpretovat jako minimalizace normy vektoru:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), \dots, r_m(\mathbf{x}))^T$$

Minimalizace součtu čtverců

- obecně II

Nejčastěji se používá euklidovská (L_2) norma, pro kterou dostáváme minimalizovanou funkci ve tvaru:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i(\mathbf{x})^2$$

Namísto L_2 normy je také možno použít normu L_1 (součet absolutních hodnot r_i) nebo L_∞ (maximum z absolutních hodnot r_i). Tyto normy mají svoje opodstatnění: například L_1 norma lépe eliminuje body měření, které „uletěly“, tj. jsou výrazně mimo průběh zadaný ostatními body, často v důsledku chyby při měření. V přednáškách budeme dále pracovat pouze s Euklidovskou normou.

Minimalizace součtu čtverců

- obecně III

Na funkce typu:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i(\mathbf{x})^2$$

je možno přímo aplikovat minimalizační metody, probrané v předchozích kapitolách. Při výpočtech ale můžeme ušetřit mnoho času i paměti tím, že využijeme speciální vlastnosti tohoto problému :-).

Minimalizace součtu čtverců

- obecně IV

Gradient funkce f se dá vyjádřit jako:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^m \nabla r_i(\mathbf{x}) \cdot r_i(\mathbf{x}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je *Jakobiho matice* funkce $f(\mathbf{x})$

(i -tý řádek matice $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ je gradient r_i v bodě \mathbf{x}).

Hessián funkce f se pak dá zapsat jako:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^m \nabla r_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla r_i(\mathbf{x})^T + 2 \sum_{i=1}^m \nabla^2 r_i(\mathbf{x}) \cdot r_i(\mathbf{x})$$

Minimalizace součtu čtverců

- obecně V

Pokud je model M v dobré shodě s daty, pak v minimu \mathbf{x}^* má funkce f velmi malou (kladnou) hodnotu. Pak tedy $r_i(\mathbf{x})$ jsou malá čísla a v okolí \mathbf{x}^* se proto dá zanedbat druhá suma ve vztahu:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^m \nabla r_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla r_i(\mathbf{x})^T + 2 \sum_{i=1}^m \nabla^2 r_i(\mathbf{x}) \cdot r_i(\mathbf{x})$$

Hessián funkce f pak může být aproximován jako:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \approx 2 \sum_{i=1}^m \nabla r_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla r_i(\mathbf{x})^T = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

Minimalizace součtu čtverců

- Gauss-Newtonovy metody

Metody, které kombinují tuto aproximaci s Newtonovskými metodami se nazývají **Gauss-Newtonovy metody**.

Klasický Newtonovský vztah pro výpočet směru přesunu (\mathbf{s}^k) z bodu \mathbf{x}^k do bodu \mathbf{x}^{k+1} :

$$\mathbf{G}^{(k)} \cdot \mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)}$$

je tedy přeformulován na vztah:

$$\mathbf{J}^{(k)T} \cdot \mathbf{J}^{(k)} \cdot \mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{J}^{(k)T} \cdot \mathbf{r}^{(k)}$$

Minimalizace součtu čtverců

- Levenberg-Marquardtovy metody

Použití dané aproximace v metodě s omezeným krokem dává **Levenberg-Marquardtovu metodu pro součet čtverců**. Původně byla Levenberg-Marquardtova metoda vyvinuta právě pro tuto aplikaci. Rovnice:

$$\left(\mathbf{G}^{(k)} + \nu\mathbf{I}\right)\delta^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)}$$

kterou využívá Levenberg-Marquardtova metoda se v tomto speciálním případě prepisuje do tvaru:

$$\left(\mathbf{J}^{(k)\top} \cdot \mathbf{J}^{(k)} + \nu\mathbf{I}\right)\delta^{(k)} = -\mathbf{J}^{(k)\top} \cdot \mathbf{r}^{(k)}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úvod

V tomto případě je model lineární vzhledem k aproximovaným parametrům:

$$M(t_i, \mathbf{x}) = \phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n$$

Pro odchylku modelu od reálného výsledku měření platí:

$$\Rightarrow r_i(\mathbf{x}) = M(t_i, \mathbf{x}) - y_i = \phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n - y_i$$

Funkce, kterou budeme v rámci metody minimalizovat, má tedy tvar:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i(\mathbf{x})^2 = \sum_{i=1}^m [\phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n - y_i]^2$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úvod II

Budeme tedy minimalizovat funkci:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m [\phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n - y_i]^2$$

V minimu musí pro všechny parametry x_1, \dots, x_n modelu platit:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

Po odderivování tedy platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m 2 \cdot \phi_j(t_i) \cdot [\phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n - y_i] = 0$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úvod III

Rovnici:

$$\sum_{i=1}^m 2 \cdot \phi_j(t_i) \cdot [\phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n - y_i] = 0$$

budeme dále upravovat:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i) &= \sum_{i=1}^m [\phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n] \cdot \phi_j(t_i) = \\ &= x_1 \cdot \sum_{i=1}^m \phi_1(t_i) \cdot \phi_j(t_i) + \dots + x_n \cdot \sum_{i=1}^m \phi_n(t_i) \cdot \phi_j(t_i) \end{aligned}$$

Soustavu rovnice v tomto tvaru můžeme zapsat pomocí matice:

$$A \cdot x = b$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úvod IV

Soustavu rovnic:

$$\sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i) = x_1 \cdot \sum_{i=1}^m \phi_1(t_i) \cdot \phi_j(t_i) + \dots + x_n \cdot \sum_{i=1}^m \phi_n(t_i) \cdot \phi_j(t_i)$$

Ize zapsat ve tvaru $A \cdot x = b$ následovně:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^m \phi_k(t_i) \cdot \phi_j(t_i) \qquad b_k = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i)$$

kde $k, j \in \{1, \dots, n\}$

Můžeme tedy obejít náročný proces minimalizace a získat minimum přímo řešením této soustavy.

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad

Chceme řešit tento problém:

Mějme objekt, pohybující se v čase t rychlostí v .

Naměřili jsme, že objekt se v čase

$t_1 = 1\text{ s}$ pohyboval rychlostí $v_1 = 1\text{ m/s}$

$t_2 = 2\text{ s}$ pohyboval rychlostí $v_2 = 6\text{ m/s}$

$t_3 = 3\text{ s}$ pohyboval rychlostí $v_3 = 2\text{ m/s}$

Pohyb tohoto objektu považujeme za rovnoměrně zrychlený a můžeme ho tedy modelovat pomocí vztahu:

$v = a \cdot t + v_0$, kde:

a zrychlení objektu

v_0 počáteční rychlost objektu

Úkolem je určit parametry a a v_0 .

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad II

Obecný vztah pro model:

$$M(t_i, \mathbf{x}) = \phi_1(t_i) \cdot x_1 + \dots + \phi_n(t_i) \cdot x_n$$

můžeme tedy v našem případě přepsat do tvaru:

$$M(t_i, (a, v_0)) = \phi_1(t_i) \cdot a + \phi_2(t_i) \cdot v_0 = a \cdot t + v_0$$

$$\Rightarrow n = 2$$

Pro ϕ_1 a ϕ_2 tedy platí:

$$\phi_1(t_i) = t_i$$

$$\phi_2(t_i) = 1$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad III

Měřením jsme získali 3 body: (1, 1); (2, 6) a (3, 2) ($\Rightarrow m = 3$)

Problém lze obecně zapsat pomocí soustavy n rovnic $A \cdot x = b$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^m \phi_k(t_i) \cdot \phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \dots, n\}$$

V našem případě tedy bude platit:

$$a_{11} = t_1 \cdot t_1 + t_2 \cdot t_2 + t_3 \cdot t_3 = 14$$

$$a_{12} = t_1 + t_2 + t_3 = 6$$

$$a_{21} = t_1 + t_2 + t_3 = 6$$

$$a_{22} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$b_1 = y_1 \cdot t_1 + y_2 \cdot t_2 + y_3 \cdot t_3 = 19$$

$$b_2 = y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = v_0$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad IV

Budeme tedy řešit soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 19 \\ 6 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Řešení: $a = 0.5 \text{ m/s}^2$
 $v_0 = 2 \text{ m/s}$

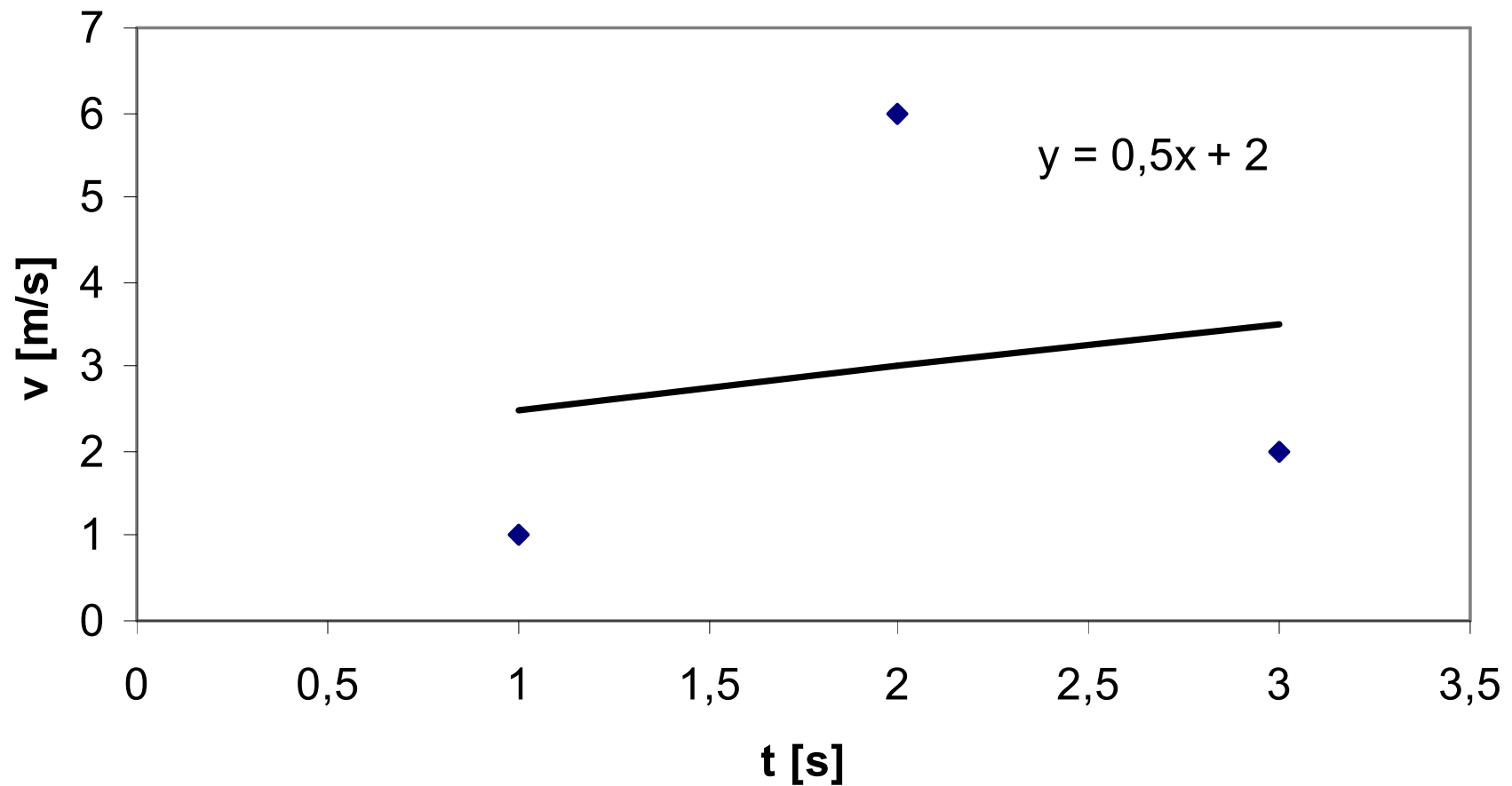
Součet čtverců odchylek:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m (M(t_i, \mathbf{x}) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^3 ((a \cdot t_i + v_0) - y_i)^2 = \\ &= (0,5 \cdot 1 + 2 - 1)^2 + (0,5 \cdot 2 + 2 - 6)^2 + (0,5 \cdot 3 + 2 - 2)^2 = \\ &= 1,5^2 + (-3)^2 + 1,5^2 = 13,5 \end{aligned}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad V

Grafické znázornění výsledku:



Lineární úloha nejmenších čtverců

- úlohy se dvěma parametry

S tímto typem úloh se setkáváme v praxi velmi často, jedná se o úlohy typu:

Máte zadáno m bodů (t_i, y_i) , proložte těmito body přímkou.

= nalezněte koeficienty k a q v rovnici $y = k \cdot t + q$.

V tomto případě lze obecnou soustavu rovnic $A \cdot x = b$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^m \phi_k(t_i) \cdot \phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \dots, n\}$$

Přepsat do tvaru:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úlohy se dvěma parametry II

Řešením této soustavy:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

Pak získáme pro k a q vztahy:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^m y_i \cdot t_i - \frac{\sum_{i=1}^m t_i \cdot \sum_{i=1}^m y_i}{m}}{\sum_{i=1}^m t_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^m t_i \cdot \sum_{i=1}^m t_i}{m}}$$

$$q = \frac{\sum_{i=1}^m y_i - k \cdot \sum_{i=1}^m t_i}{m}$$

$$\sum_{i=1}^m t_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^m t_i \cdot \sum_{i=1}^m t_i}{m}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úlohy se dvěma parametry III

Příklad:

Zadání stejné jako u předchozího příkladu o „objektu, pohybujícím se v čase t rychlostí v “.

Máme tedy body: (1, 1); (2, 6) a (3, 2) a chceme jimi proložit
přímku: $v = a \cdot t + v_0$

Konkrétní výpočet:

$$\sum_{i=1}^3 v_i \cdot t_i = 19 \quad \sum_{i=1}^3 t_i = 6 \quad \sum_{i=1}^3 v_i = 9 \quad \sum_{i=1}^3 t_i^2 = 14$$

$$k = \frac{19 - \frac{6 \cdot 9}{3}}{14 - \frac{6 \cdot 6}{3}} = 0,5$$

$$q = \frac{9 - 0,5 \cdot 6}{3}$$

Kvadratická úloha nejmenších čtverců

- úloha se třemi parametry

Naměřenými body tedy chceme proložit rovnicí:

$$y = a.t^2 + b.t + c$$

Analogicky jako v lineárním případě lze i v kvadratickém případě tuto speciální úlohu zapsat pomocí soustavy rovnic $A.x = b$, a to následovně:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^4 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^2 \\ \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i & cm \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^m t_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

Kvadratická úloha nejmenších čtverců

- úloha se třemi parametry II

Metodou nejmenších čtverců najděte polynom
2.stupně, který je nejbližší bodům:

[1,1], [2,3], [4,6].

Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^4 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^2 \\ \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^m t_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

Kvadratická úloha nejmenších čtverců

- úloha se třemi parametry III

=> soustava:

$$273a + 73b + 21c = 109$$

$$73a + 21b + 7c = 31$$

$$21a + 7b + 3c = 10$$

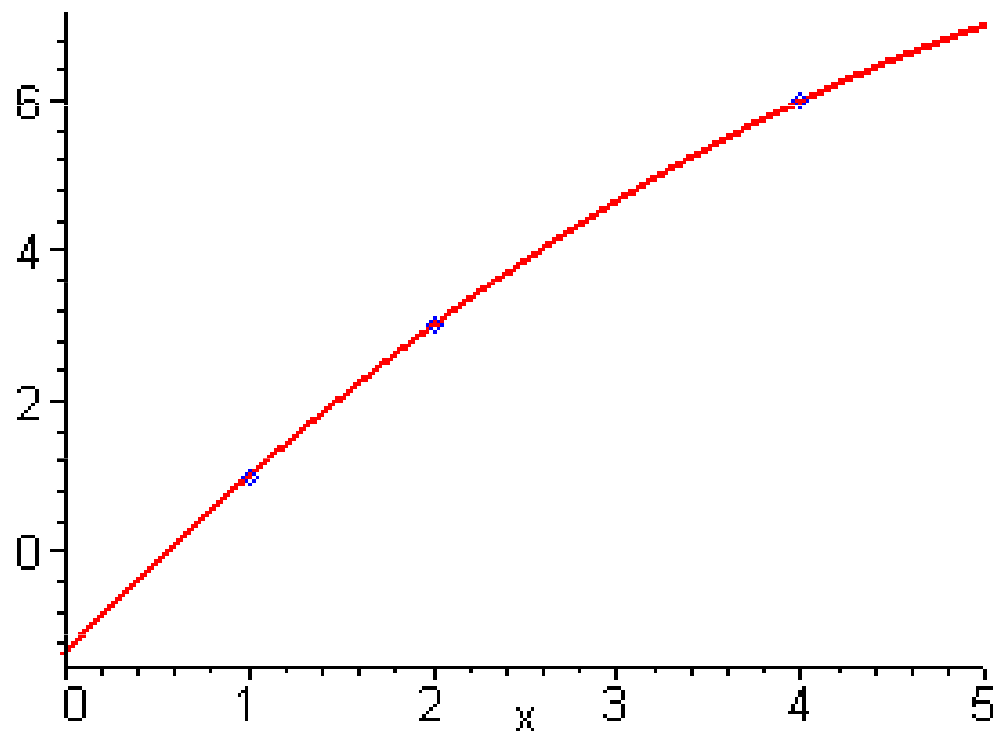
Výsledek je:

$$a = -1/6,$$

$$b = 5/2,$$

$$c = -4/3.$$

$$y = \frac{-1}{6}t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{4}{3}$$



Cvičení

- příklad 1

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejbližší bodům: (1,1); (2,6) a (3,2)

Použijte „přímý přístup“ - vytvořit funkci, odderivovat, derivaci položit rovnu nule, dořešit :-).

Řešení: Hledáme přímku ve tvaru $y = kx + q$

Minimalizovaná funkce:

$$f(k, q) = \sum_{i=1}^n (t_i \cdot k + q - y_i)^2$$

$$f(k, q) = (k + q - 1)^2 + (2k + q - 6)^2 + (3k + q - 2)^2$$

$$f(k, q) = 14k^2 + 12kq - 38k + 3q^2 - 18q + 41$$

Cvičení

- příklad 1 II

Derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 28k + 12q - 38 \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 12k + 6q - 18$$

Řešíme tedy $0 = 28k + 12q - 38$ a $0 = 12k + 6q - 18$

Minimum je v bodě $k = 0.5$ a $q = 2$

Cvičení

- příklad 2

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejbližší bodům: $(1, 2)$; $(2, 2.3)$ a $(3, 3)$

Vytvořte soustavu rovnic $A \cdot x = b$ a vyřešte ji, obecně:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^m \phi_k(t_i) \cdot \phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \dots, n\}$$

Cvičení

- příklad 2

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejbližší bodům: (1, 2); (2, 2.3) a (3, 3)

Vytvořte soustavu rovnic $A \cdot x = b$ a vyřešte ji, obecně:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^m \phi_k(t_i) \cdot \phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \dots, n\}$$

Soustava:

$$a_{11} = 14 \quad a_{12} = 6 \quad a_{21} = 6 \quad a_{22} = 3$$

$$b_1 = 15,6 \quad b_2 = 7,3$$

$$\text{Řešení: } k = 0,5 \quad q = 1,43$$

Cvičení

- příklad 3

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejbližší bodům: $(-2,0)$; $(0,1)$ a $(2,3)$

Využijte vztahy:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^m y_i - k \cdot \sum_{i=1}^m t_i}{m}$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^m y_i \cdot t_i - \frac{\sum_{i=1}^m t_i \cdot \sum_{i=1}^m y_i}{m}}{\sum_{i=1}^m t_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^m t_i \cdot \sum_{i=1}^m t_i}{m}}$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i t_i = 6 \quad \sum_{i=1}^3 t_i = 0 \quad \sum_{i=1}^3 y_i = 4 \quad \sum_{i=1}^3 t_i^2 = 8$$

$$k = \frac{6 - \frac{0.4}{3}}{8 - \frac{0.0}{3}} = 0,75$$

$$q = \frac{4 - \frac{3}{4} \cdot 0}{3} = 1,33$$

Cvičení

- příklad 4

Metodou nejmenších čtverců najděte polynom
2.stupně, který je nejbliže bodům:

[1,2], [2,0], [3,3], [4,4].

Opět hledáme polynom ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$