

9. procvičení z MB154, podzim 2023

Příklad 1. Určete, čemu se rovná $\binom{-1}{n}$. (Výsledek: $(-1)^n$.)

Příklad 2. Ve volejbalové extralize je 13 týmů. Po první polovině má každý tým odehráno 12 zápasů, z každého z nich je možné získat 0/1/2/3 body, přičemž Brno předvedlo žalostný výkon a získalo 10 bodů z 36 možných. Jaká je pravděpodobnost stejného bodového zisku, pokud by se každý zápas místo odehrání losoval, se stejnou pravděpodobností 1/4 pro každou z variant 0/1/2/3 body.

(Výsledek: $(\binom{12}{0}\binom{21}{11} - \binom{12}{1}\binom{17}{11} + \binom{12}{2}\binom{13}{11}) / 4^{12} = 209\,352 / 4^{12} = 1,25\%$.)

Příklad 3. Nevyvážená kostka má pravděpodobnost, že padne šestka, dvakrát vyšší než pro ostatní čísla. Jaká je pravděpodobnost, že při hodech čtyřmi takovými kostkami padne součet 13? (Případně porovnejte s obyčejnou kostkou.)

(Výsledek: Jedná se o koeficient u x^{13} ve výrazu

$$(1/7 \cdot x + \dots + 1/7 \cdot x^5 + 2/7 \cdot x^6)^4 = 1/7^4 \cdot \left(\frac{1-x^7}{1-x} + x^6 \right)^4,$$

jehož umocněním podle binomické věty a úpravou jako v předchozím příkladě dojdeme k výsledku $(\binom{12}{3} - 4 \cdot \binom{6}{3} + 4 \cdot \binom{6}{2}) / 7^4 = 200 / 7^4 = 8,33\%$; pro obyčejnou kostku vyjde $140 / 6^4 = 10,80\%$.)

Příklad 4. Rozviňte do mocninné řady funkci:

(1) $\frac{x^2-10}{x^2+x-2}$

(2) $\frac{x}{x^3-5x^2+8x-4}$

(Výsledky: Rozklady na parciální zlomky: $1 + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-1}$; $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$. Rozvínutím do mocninných řad: $1 + \sum_{k \geq 0} ((-1/2)^k + 3) \cdot x^k \Rightarrow a_k = [k=0] + (-1/2)^k + 3$; $\sum_{k \geq 0} (-1 + (1/2)^{k+1} + (1/2)^{k+1} \cdot (k+1)) \cdot x^k \Rightarrow a_k = -1 + (1/2)^{k+1} \cdot (k+2)$.)

Příklad 5. Určete vytvářející funkci posloupnosti $(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots)$.

(Výsledek: $k^2 = 2 \cdot \binom{k+2}{2} - 3 \cdot \binom{k+1}{1} + 2 \cdot \binom{k+0}{0} \Rightarrow a(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$.)