Od modálních logik k TILu. Vícehodnotové logiky

Luboš Popelínský

E-mail: popel@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

- Klasické a neklasické logiky
- Intenzionální logiky. Modální logika
- Temporální a jiné modality
- Transparentní intenzionální logika. Začínáme
- Vícehodnotová logika

Klasické a neklasické logiky

Už od Aristotela se logika řídí dvěma základními logickymi principy[1]

- principem extenzionality
- principem dvouhodnotovosti.

princip extenzionality : pracujeme vyhradně s pravdivostními hodnotami tvrzení a nikoliv s jejich obsahem. Tedy, logika pracuje pouze s oznamovacími větami a na těchto větách jí nezajímá, o čem tyto věty jsou, nybrž vyhradně a pouze to, jaká je jejich pravdivostní hodnota, tj. zda se jedná o pravdivá či nepravdivá tvrzení. Přesněji to znamená, že logické spojky fungují jako funkce z množiny pravdivostních hodnot do množiny pravdivostních hodnot, tj., že pravdivostním hodnotám částí složeného vyroku přiřadí vyslednou pravdivostní hodnotu (celého složeného vyroku).

[1] Projekt ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 "Logika: systémovy rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logickych propedeutik pro mezioborová studia"

Úvodem k intenzionálním logikám. Módy pravdy

Cavaco Silva je presidentem Portugalska.

Jana čte.

Sluneční soustava má devět planet. (Nebo osm?)

Třetí odmocnina z 27 jsou 3.
nutně pravda, i v budoucnu. Ale:
Jana ví, že třetí odmocnina z 27 jsou 3.
Jan nevěří, že třetí odmocnina z 27 jsou 3.

Verifikace programů: nejen různé světy, ale i různé budoucnosti

VŽDY pravda, NĚKDY pravda, VÍM že, VĚŘÍM že, ...

Modální logika

$\Box\Phi$ - "nutně platí ϕ", "ϕ je vždy pravda"

$\Diamond\phi$ - "možná platí ϕ", "ϕ je někdy pravda

K-logika K $==$ Kripke, nejobecnější, tj. s minimálními omezeními pro $\Box$ resp. $\Diamond$

Je-li $\mathcal{L}$ jazyk predikátové logiky, rozšíříme ho na modální jazyk $\mathcal{L}_{\Box,\Diamond}$ přidáním dvou symbolů $\Box$ and $\Diamond$ do abecedy a do definice syntaxe přidáme

Je-li ϕ formule, pak také $(\Box\phi)$ a $(\Diamond\phi)$ jsou formule.

Sémantika: Kripkeho rámce, tj. Kripkeho interpretace

Sémantika modální logiky

Kripkeho interpretace (též rámec) $C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$

W ... množina světů

S ... relace přístupnosti/dostupnosti (accessibility)

$C(p)$ ... logika, např. výroková, $C(p)$ pro $\mathcal{L}$ v každém světě $p \in W$

$C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$ je Kripkeho rámec pro jazyk $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-frame) jestliže pro každé světy p a q z W, pSq implikuje, že $C(p) \subseteq C(q)$ a interpretace konstant v $\mathcal{L}\ (p) \subseteq \mathcal{L}\ (q)$ je stejná v $C(p)$ i v $C(q)$.

Sémantika modální logiky

Nechť $C = \{W, S, \{C(p)\}_{p \in W}\}$ je Kripkeho rámec pro jazyk $\mathcal{L}$, $p \in W$ a ϕ je formule jazyka $\mathcal{L}$ (p). Formule ϕ platí ve světě p (angl. p forces ϕ), píšeme $p \Vdash \phi$, jestliže

1. pro atomickou formuli ϕ, $p \Vdash \phi \Leftrightarrow \phi$ je pravdivá v $C(p)$.
2. $p \Vdash (\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow p \Vdash \phi$ implikuje $p \Vdash \psi$. Podobně pro ostatní logické spojky a $\forall$, $\exists$
3. $p \Vdash \Box\phi \Leftrightarrow$ pro všechny světy $q \in W$ takové, že pSq [2] $q \Vdash \phi$.
4. $p \Vdash \Diamond\phi \Leftrightarrow$ existuje $q \in W$ pSq a $q \Vdash \phi$.

Formule ϕ je pravdivá v Kripkeho rámci (interpretaci) C, jestliže pro každý svět $p \in W$ ϕ platí ve světě p, píšeme $\Vdash_C \phi$. Formule ϕ je tautologie, jestliže platí ve všech intepretacích Kripkeho.

[2] svět q je přístuoný ze světa p

Tautologie ... ?

axiom	jméno	vlastnost relace R
$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	K	žádné požadavky
$\Box A \to \Diamond A$	D	$\exists u(wRu)$
$\Box A \to A$	M	wRw
$\Box A \to \Box\Box A$	4	$(wRv \wedge vRu) \Rightarrow wRu$
$A \to \Box\Diamond A$	B	$wRv \Rightarrow vRw$
$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	5	$(wRv \wedge wRu) \Rightarrow vRu$

viz David Pelikán, Vzájemná srovnání axiomatickych systémů modálních logik, DP FFUK Praha 2007

Temporální a jiné modality

od modalit "nutně", "možná"celkem přirozeně k modalitám temporálním "někdy/vždycky v minulosti/budoucnosti viz např.
https://www.fi.muni.cz/~popel/lectures/bak_logika/non-classical-logics/modal-logic.pdf

Deontické modality
Op .... Je přikázáno p (z anglického ordered = přikázáno)
Fp ....Je zakázáno p (z anglického forbidden = zakázáno)
Pp ....Je povoleno p (z anglického permitted = povoleno)

dosavadní modality - alethické (nutnost, možnost), temporální i deontické : v jistém smyslu absolutní a všeobecně platné, epistemické modality jsou "relativní":

Kxp .... x ví, že platí p (z angl. know = vědět)
Uxp .... x neví, že platí p (z unknown = neznámé)
Bxp .... x věří, že platí p (z believe = věřit)

Nedostatečná expresivita predikátové logiky. Příklady

1. Červená barva je krásnější než modrá. Kostka je červená.
   individuum(červená barva) vs. vlastnost (je červená)
   nelze vyjádřit např. jejich rovnost
2. Varšava je hlavní město Polska.
   Varšava - jméno individua
   hlavní město Polska - individuová role
   - závisí na světě a čase
   - význam "býti hlavním městem"na světě a čase nezávisí
3. Číslo X je větší než číslo Y. vs. Otec je větší než syn.
   matematické "větší než", relace, pevně dané. vs.
   empirické : vztah dvou individuí, který se může měnot v čase
4. ano vs. V Brně prší.
   ano = pravdivostní hodnota true vs. propozice označuje pravdivostní hodnotu, která se mění v čase.
   I když pravdivostní hodnota někdy závisí na světe a čase, samotný význam na nich nezávisí

Problém substituce

Problém substituce : $a = b; C(x/a) \vdash C(x/b)$

Prezident ČR je manžel Livie.
Prezident ČR je ekonom.
$\vdash$
Manžel Livie je ekonom.

Ale:
Prezident ČR je manžel Livie.
Miloš Zeman chce být prezident ČR.
$\vdash$
Miloš Zeman chce být manželem Livie.

Richard Montague vs. Pavel Tichý

Montague : přirozený jazyk nesplňuje princip kompozicionality (Frege) , protože se skládá z mnoha tzv. nepoddajnych vyrazů.
nepoddajný = vyznam vyrazu daného jazyka často závisí na něčem, co nebylo pojmenováno. Viz

Karel myslí na prezidenta České republiky.
Karel myslí na manžela Livie Klausové. [3]

Cvičení: zkusme vyhodnotit: (i) v roce (světě) 2020 (ii) v roce 2009: ?

Montague : denotátem (nebo referencí) vyrazu prezident ČR jeho extenze,(hodnota v aktuálním světě a čase,) osoba Václava Klause, stejně tak : Václav Klaus denotátem vyrazu mažel Livie Klausové.Nicméně reference obou vět již shodné nejsou, Karel může myslet na prezidenta ČR, aniž by myslel na manžela Livie Klausové. Tuto neshodu Montague vidí a připisuje ji tím, že dané vyrazy jsou nepoddajné a dále neřeší.

---

[3] Daniel Balík,Montaguova logika ve srovnání s Transparentní intenzionální logikou,DP FF MU2009

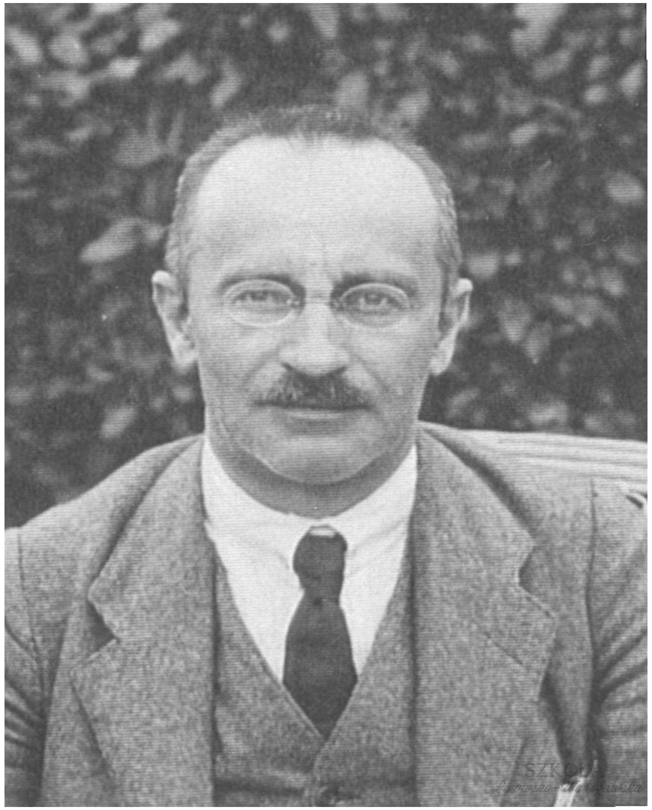
Transparentní intezionální logika

Karel myslí na prezidenta České republiky.
Karel myslí na manžela Livie Klausové.

(Podle TIL) příklad neříká nic o tom, že Karel myslí na Václava Klause, denotátem vyrazu prezident ČR není Václav Klaus.

Denotátem tohoto vyrazu je individuová role, intenze. Václav Klaus je nahodily držitel této role v aktuálním světě a čase, je referencí

Vícehodnotová logika



Od dvouhodnotové k tříhodnotové logice

nepravda (0) - pravda (1)
nepravda (0) - nevím (1/2) - pravda (1)

zavedeme funkci $val(A) =$ pravdivostní hodnota formule A
např. $I(p) = 1, I(q) = 0$, pak např. $val(p) = 1$, $val(\neg p) = 0$,
$val(p \wedge q) = 0$, $val(p \Rightarrow q) = 0$

Pak, v souhlasu se sémantikou logických spojek, jistě platí
$val(\neg A) = 1 - val(A)$, $val(A \wedge B) = min(val(A), val(B)$,
$val(A \vee B) = max(val(A), val(B)$

(pro další spojky je možno spočítat z těchto tří)

Trojhodnotová Łukasiewiczova logika

zobecníme funkci *val*() pro tříhodnotovou logiku. A jsme tam ... ?

Neplatí např. princip vyloučení třetího. Jistě.

Potíž: jen velmi málo tautologií v takové logice najdeme.

Zkusme nadefinovat jinak implikaci

	$\neg p \vee q$			nová definice		
p/q	0	1/2	1	0	1/2	1
0	1	1	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1	1/2	1	1
1	0	1/2	1	0	1/2	1

$$val(p \Rightarrow q) = min(1, 1 - val(p) + val(q))$$

K sémantice Łukasiewiczovy logiky

Opět pracujeme s pojmem interpretace, tj. přiřazením pravdivostních hodnot z $\{0, 1/2, 1\}$ výrokovým symbolům

Model formule ϕ je taková interpretace , kdy $val(\phi) > 0$

Formule ϕ sémanticky vyplývá z množiny premis Φ, $\Phi \models \phi$, jestliže pro každou interpretaci I $val(\Phi) \leq val(\phi)$

Cvičení: dokažte, že pokud $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, ...\}$, pak $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge ... \Rightarrow \phi$.

Fuzzy logika. Lotfi Zadeh

vychází z fuzzy množin, kdy příslušnost do množiny je z intervalu $[0, 1]$ a fuzzy relací.

Příklad: množina "být mladý"

stejná funkce *val*(), jen nepracujeme s diskrétní doménou $\{0, 1/2, 1\}$ ale intervalem $[0, 1]$

dále analogickyjako pro trojhodnotovou logiku

Víme a známe

- co jsou modální logiky
- modality "nutně", "možná"
- jiné modality a temporální logiky
- a něco k tomu z těch nejobecnějších intenzionálních logik
- především nástin Tichého TILu
- tříhodnotové a fuzzy logiky

Informační zdroje

Non-monotonic logic, viz Logic for Applications

Stanford Encyclopedia of Philosophy, un peut updated https:/Stanford Encyclopedia of Philosophy, un peut updated/plato.stanford.edu/entries/logic-ai/

JELIA: European Conference on Logics in Artificial Intelligence. last issue 2019 https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-19570-0