5 Rekurze a induktivní definice

Mimo „přímočarých" definic množin a funkcí, jako výčtem prvků či explicitním zadáním, se obzvláště v informatice setkáváme s definicemi nepřímými, které se odvolávají na sebe sama.

Odborně se taková situace nazývá *rekurzí* či *induktivní definicí*. □

Stručný přehled lekce

* Posloupnosti a rekurentní vztahy pro ně, jejich řešení a důkazy.
* Rekurze za přítomnosti více parametrů a použití indukce.
* Induktivní definice množin s ukázkami.

5.1 Posloupnosti a rekurentní vztahy

- Uspořádané k-tice z daného oboru hodnot H jsou nazývány *konečnými posloupnostmi* délky k (nad H). □

- Pojem posloupnosti zobecňuje toto pojetí na „nekonečnou délku“ takto:

Definice 5.1. Posloupnost (nekonečná) je zobrazením z přirozených čísel $\mathbb{N}$ do oboru hodnot H, neboli

$$p : \mathbb{N} \to H.$$

Místo „funkčního“ zápisu n-tého členu posloupnosti jako $p(n)$ častěji používáme „indexovou“ formu jako p_n, ve které se celá posloupnost zapíše $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Oborem hodnot H posloupnosti obvykle bývá nějaká číselná množina, ale může to být i jakákoliv jiná množina. □

Poznámka: Třebaže to není zcela formálně přesné, běžně se setkáme s posloupnostmi indexovanými od nuly nebo od jedničky, jak se to v aplikacích hodí.
I my se budeme tímto řídit a vždy si určíme počáteční index podle potřeby.

Příklady posloupností

- $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \ldots, p_i = 2i, \ldots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel, □
- $(3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \ldots)$ je posl. postupných dekadických rozvojů π, □
- třeba (*jablko, hruška, švestka, hruška, hruška,...*) je posloupnost nad druhy ovoce coby oborem hodnot. □
- $(1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots)$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$, □
- avšak pokud bychom chtěli stejnou posloupnost $(1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots)$ určit indexy od jedné, tj. zadat ji jako q_i, $i \geq 1$, tak vztah bude $q_i = (-1)^{i-1}$. □

Definice: Posloupnost $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je

- *rostoucí* pokud $p_{n+1} > p_n$ a *nerostoucí* pokud $p_{n+1} \leq p_n$,
- *klesající* pokud $p_{n+1} < p_n$ a *neklesající* pokud $p_{n+1} \geq p_n$

platí pro všechna n.

Rekurentní zadání posloupnosti

Definice: Říkáme, že posloupnost $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zadána *rekurentně*, pokud je dán její počáteční člen p_0 (či několik počátečních členů) a dále máme předpis, jak určit hodnotu členu p_{n+1} z hodnot p_i pro nějaká $i \leq n$.

Ukázky rekurentně zadaných posloupností:

- Zadáme-li posloupnost p_n počátečním členem $p_0 = 1$ a rekurentním vztahem $p_{n+1} = 2p_n$ pro $n \geq 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna n. □
- Funkce „faktoriál“ (na přirozených číslech) je dána počáteční hodnotou $0! = 1$ a rekurentním vztahem $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ pro $n \geq 0$. □
- Známá Fibonacciho posloupnost je zadaná počátečními členy $f_1 = f_2 = 1$ a vztahem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pro $n \geq 1$. □

Všimněte si v poslední ukázce, že není potřeba doslova dodržovat formu rekurentního vztahu „p_{n+1} z hodnot p_i“, ale vždy je třeba hodnotu následujícího členu posloupnosti odvozovat z předchozích (tj. už určených) členů, v tom případě „f_{n+2} z hodnot f_i, $i = n, n+1$“.

Řešení rekurentní posloupnosti

Příklad 5.2. *Posloupnost $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0) = 3 \quad \text{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ vzorcem v závislosti na n. □

Řešení: V první fázi řešení takového příkladu musíme nějak „uhodnout" hledaný vzorec pro $f(n)$. Jak? Zkusíme vypočítat několik prvních hodnot a uvidíme...

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2 \cdot f(0) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\
f(2) &= 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\
f(3) &= 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\
f(4) &= 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \square
\end{aligned}$$

Nepřipomínají nám tato čísla něco? Co třeba výrazy $8-1$, $16-1$, $32-1$, $64-1\ldots$? Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $\boldsymbol{f(n) = 2^{n+2} - 1}$. □

Ve druhé fázi nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění" dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n. □

Příklad 5.2. *Posloupnost $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0) = 3 \quad \text{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ vzorcem v závislosti na n.

Řešení: ...

Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $\boldsymbol{f(n) = 2^{n+2} - 1}$.

Ve druhé fázi nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění" dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n. □

- Báze pro $n := 0$ říká $f(0) = 2^{0+2} - 1 = 4 - 1 = 3 = f(0)$, což platí. □
- Indukční krok využije indukční předpoklad platnosti vztahu $f(n) = 2^{n+2} - 1$ pro $n := i$ (tj. $f(i) = 2^{i+2} - 1$) a pokračuje úpravou ze zadaného rekurentního vzorce

  $$f(i+1) = 2 \cdot f(i) + 1 = 2 \cdot (2^{i+2} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{i+2} - 2 + 1 = 2^{(i+1)+2} - 1,$$

  což po dosazení pro $n := i+1$ znamená opět požadovaný vztah $f(n) = 2^{n+2} - 1$. □

Podle principu matematické indukce je nyní dokázáno, že pro zadanou rekurentní posloupnost f platí $f(n) = 2^{n+2} - 1$ pro všechna přirozená n. □

Příklad 5.3. *Posloupnost* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je zadaná rekurentní definicí*

$$s_0 = 0 \quad \text{a} \quad s_n = s_{n-1} + n^2$$

pro všechna $n \geq 1$. *Dokažte, že* $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ *pro všechna přirozená* n.

Řešení: Opět postupujeme matematickou indukcí podle n.

- Báze $n := 0$: $s_0 = \frac{1}{6}\cdot 0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1) = 0$, což platí.
- Indukční krok: za využití $s_{i-1} = \frac{1}{6}(i-1)(i-1+1)(2i-2+1) = \frac{1}{6}(i-1)i(2i-1)$, což je indukční předpoklad pro $n := i-1$ a libovolné $i \geq 1$, upravujeme

$$s_i = s_{i-1} + i^2 = \frac{1}{6}(i-1)i(2i-1) + i^2 = \frac{1}{6}i\left(2i^2 - 3i + 1\right) + i^2$$

$$= \frac{1}{6}i\left(2i^2 - 3i + 1 + 6i\right) = \frac{1}{6}i(i+1)(2i+1),$$

což dokazuje požadovaný vztah $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ také pro $n := i$.

□

Poznámka: Výsledek Příkladu 5.3 je ukázkou tzv. sumačního vzorce pro řadu

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Jinou ukázkou je už dříve zmíněný základní vztah $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

5.2 Rekurze s více parametry a indukce

- Kromě přímočarých ukázek rekurze na funkcích s jediným celočíselným parametrem (tj. na posloupnostech) se lze setkat, především v návrhu algoritmů, s rekurzí za přítomnosti více parametrů. □

- I pro takové obecnější případy je základním matematickým přístupem použít indukci, avšak nejprve je nutno vhodně zvolit či vytvořit jeden celočíselný parametr, podle nějž indukci můžeme vést. □

- Samozřejmě takový parametr (i nově vytvořený) opět musí být zdola ohraničený a pro každou rekurentně odkazovanou hodnotu musí být nižší než pro aktuálně určovanou hodnotu.

Možné přístupy k věci si uvedeme na několika typických ukázkách.

Přístup fixace parametru

Příklad 5.4. *Mějme funkci* $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definovanou rekurentně takto:*

- $m(0, b) = 0$ *pro všechna* $b \in \mathbb{N}$ *a*
- $m(a+1, b) = m(a, b) + b$ *pro všechna* $a, b \in \mathbb{N}$.

Co bude hodnotou $m(a, b)$ *pro obecné* $a, b \in \mathbb{N}$*?*

Bližším pohledem na zadanou definici zjistíme, že hloubka zanoření rekurze pro vyčíslení $m(a, b)$ je přesně a. Jelikož každé zanoření k výsledku přičte hodnotu b, odhadneme:

Věta. Pro každá $a, b \in \mathbb{N}$ platí $m(a, b) = a \cdot b$ (součin daných parametrů).

Jaký je vhodný postup k důkazu tohoto tvrzení indukcí? Je snadno vidět, že rekurentní vyhodnocení na hodnotě parametru b nijak podstatně nezáleží (b lze fixovat) a důležité je sledovat měnící se hodnotu a. Tato úvaha nás dovede k následujícímu přístupu:

* $m(0,b)=0$ pro všechna $b\in\mathbb{N}$ a
* $m(a+1,b)=m(a,b)+b$ pro všechna $a,b\in\mathbb{N}$.

Věta. Pro každá $a,b\in\mathbb{N}$ platí $m(a,b)=a\cdot b$ (součin daných parametrů).

Důkaz: Budiž $b\in\mathbb{N}$ libovolné ale pro další úvahy pevné.

Dokazujeme tady, že pro každou hodnotu $a:=i\in\mathbb{N}$ platí $m(i,b)=i\cdot b$.

- V bázi $i=0$ je explicitně zadáno $m(0,b)=0=0\cdot b$ pro jakékoliv $b\in\mathbb{N}$.
- Indukční krok. Nechť je tvrzení známo pro $a=i\in\mathbb{N}$ a uvažme hodnotu parametru $a:=i+1$. Podle zadání pak platí $m(i+1,b)=m(i,b)+b$. Podle indukčního předpokladu již víme, že $m(i,b)=i\cdot b$. Zbývá jen uvedené poznatky správně zřetězit

$$m(a,b)=m(i+1,b)=m(i,b)+b=i\cdot b+b=(i+1)\cdot b=a\cdot b\,.$$

Důkaz matematickou indukcí je tímto zdárně ukončen. $\square$

Indukce k součtu parametrů

Příklad 5.5. *Mějme funkci $k : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanou rekurentně takto:*

- $k(c,0) = k(0,c) = 0$ *pro všechna* $c \in \mathbb{N}$ *a*
- $k(m,n) = k(m,n-1) + k(m-1,n)$ *pro všechna* $m,n \in \mathbb{N},\ m,n > 0$.

Co bude hodnotou $k(m,n)$ pro obecné $m,n \in \mathbb{N}$?

Studenti znalí takzvaného *Pascalova trojúhelníka* už mohou tušit, že výsledek souvisí s počtem podmnožin a tedy kombinačními čísly.

My si zde správnou odpověď nejen ukážeme, ale i přesně dokážeme:

> **Věta**. Pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ je hodnota $k(m,n)$ rovna počtu všech m-prvkových podmnožin $(m+n)$-prvkové množiny, tedy jinými slovy roven známému kombinačnímu číslu $k(m,n) = \binom{m+n}{m}$.

* $k(c,0) = k(0,c) = 0$ pro všechna $c \in \mathbb{N}$ a
* $k(m,n) = k(m,n-1) + k(m-1,n)$ pro všechna $m,n \in \mathbb{N},\ m,n > 0$.

Věta. Pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ je hodnota $k(m,n)$ rovna počtu všech m-prvkových podmnožin $(m+n)$-prvkové množiny, tedy jinými slovy roven známému kombinačnímu číslu $k(m,n) = \binom{m+n}{m}$.

Důkaz indukcí vzhledem k součtu parametrů $i = m+n$:

- Báze $i = m+n = 0$ pro $m,n \in \mathbb{N}$ znamená, že $m = n = 0$. Zde však s výhodou využijeme tzv. „rozšíření báze“ na všechny hraniční případy $m = 0$ nebo $n = 0$ naší rekurze.

  V obou rozšířených případech je přímo zadáno $k(m,0) = k(0,n) = 0$. Je toto platná odpověď?

  * Kolik je prázdných podmnožin ($m = 0$) jakékoliv množiny? Jedna, $\emptyset$.
  * Kolik je m-prvkových podmnožin m-prvkové ($n = 0$) množiny? Zase jedna, ta množina samotná.

  Tím je důkaz rozšířené báze indukce dokončen.

* $k(c,0) = k(0,c) = 0$ pro všechna $c \in \mathbb{N}$ a
* $k(m,n) = k(m,n-1) + k(m-1,n)$ pro všechna $m,n \in \mathbb{N},\ m,n > 0$.

- Indukční krok přechází na součet $i+1 = m+n$. Navíc díky předchozímu rozšíření báze se rovnou můžeme omezit na případy $m,n > 0$.

  Platí tedy podle zadání $k(m,n) = k(m,n-1) + k(m-1,n)$. Přitom oba rekurentní odkazy, $k(m,n-1)$ i $k(m-1,n)$ se vztahují na případy se součtem obou parametrů rovným $m-1+n = m+n-1 = i$.

  Podle indukčního předpokladu tudíž platí, že $k(m,n-1)$ je počtem m-prvkových podmnožin i-prvkové množiny a $k(m-1,n)$ je počtem $(m-1)$-prvkových podmnožin i-prvkové množiny, třeba množiny $M = \{1,2,\dots,i\}$.

  Kolik je m-prvkových podmn. $(i+1)$-prvkové množiny $M' = M \cup \{i+1\}$? Pokud ze všech těchto podmnožin odebereme prvek $i+1$, dostaneme právě
  * m-prvkové podmnožiny (z těch neobsahujících prvek $i+1$)

  plus
  * $(m-1)$-prvkové podmnožiny (z těch původně obsahujících $i+1$).

  A to je v součtu rovno právě $k(m-1,n) + k(m,n-1) = k(m,n)$. □

Přístup se zesílením dokazovaného tvrzení

Příklad 5.6. *Zjistěte, jakou hodnotu v závislosti na celočíselném parametru* a *nabývá funkce* $t(a,1)$*, která je rekurentně definována takto:* □

- $t(0,b) = 0$ *pro všechna* $b \in \mathbb{N}$ *a*
- $t(a,b) = t(a-1,2b) + b$ *pro všechna* $a, b \in \mathbb{N},\ a > 0$.

□ Zkusíme-li si ručně vypočítat několik prvních požadovaných hodnot $t(a,1)$ pro $a = 0,1,2,3,4\dots$, postupně získáme výsledky rovné $0,1,3,7,15\dots$ (všimněte si také, jak se v rekurzivním rozvoji postupně sčítají mocniny dvou). □Na základě toho již není obtížné uhodnout, že návratová hodnota patrně bude obecně určena vztahem $2^a - 1$.

Toto je však třeba také dokázat. □

Jak záhy zjistíme, matematická indukce na naše tvrzení přímo „nezabírá“, ale mnohem lépe se nám povede s následujícím přirozeným zesílením dokazovaného tvrzení, které zobecňuje výsledek na proměnné hodnoty parametru b v návaznosti na zadaný rekurentní vztah.

* $t(0,b) = 0$ pro všechna $b \in \mathbb{N}$ a
* $t(a,b) = t(a-1, 2b) + b$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N},\ a > 0$.

Věta. Pro každé $a, b \in \mathbb{N}$ platí $t(a,b) = (2^a - 1) \cdot b$.

Důkaz: Postupujeme indukcí podle $a := i \in \mathbb{N}$. □

* V bázi pro $a = i = 0$ je určena hodnota $t(a,b) = 0 = (2^0 - 1) \cdot b$. □
* Indukční krok. Nechť je tvrzení známo pro $a = i \in \mathbb{N}$ a uvažujme další hodnotu $a := i + 1 > 0$. □ V tom případě je rekurentní podmínkou dáno $t(a,b) = t(a-1, 2b) + b$, přičemž hodnota $t(a-1, 2b) = t(i, 2b)$ vyplývá z indukčního předpokladu. Celkově tedy □

$$t(a,b) = t(i, 2b) + b = (2^i - 1) \cdot 2b + b = 2^{i+1}b - 2b + b = (2^{i+1} - 1) \cdot b\,.$$

Poslední výraz je roven požadovanému $(2^a - 1) \cdot b$. □

5.3 Induktivní definice množin

Širokým zobecněním rekurentních definic posloupností je následující koncept.

Definice 5.7. Induktivní definice množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. □
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

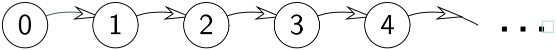
  Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

  V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$ (v pravidle číslo i).□

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující všem těmto pravidlům.

Několik jednoduchých ukázek. . .

- Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel, která je formálně zavedena následovně.
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - Je-li $i \in \mathbb{N}$, pak také $succ(i) \in \mathbb{N}$ (kde následník $succ(i)$ odpovídá $i{+}1$).



- Pro každé $y \in \mathbb{N}$ můžeme definovat jinou množinu $M_y \subseteq \mathbb{N}$ induktivně:
  - $y \in M_y$
  - Jestliže $x \in M_y$ a $x + 1$ je liché, pak $x + 2 \in M_y$.

  Pak například $M_3 = \{3\}$, nebo $M_4 = \{4 + 2i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- Dalším příkladem induktivní definice je už známé zavedení výrokových formulí z Oddílu 1.4. Uměli byste teď přesněji říci, co tam byly bázické prvky a jaká byla induktivní pravidla? A jaká byla v definici formulí role závorek?

Pokročilý ilustrační příklad

…zase na induktivní definici.

Příklad 5.8. *V Růžovém království mají zvláštní peníze – používají mince pouze dvou hodnot, tříkoruny a třináctikoruny.* □

a) *Určete induktivní definici množiny P všech celých kladných čísel, které lze jak peněžní částku složit z mincí v Růžovém království. (Uvažujte, že království má k dispozici neomezené množství mincí.)* □

b) *Dokažte, že z mincí v Růžovém království lze složit jakoukoliv celou částku od 24 korun výše.* □

c) *Chytrý Honza přijel do Růžového království a potřebuje si tam koupit jeden knoflík za korunu. Jak to může udělat a neprodělat?*

a) *Určete induktivní definici množiny P všech celých kladných čísel, které lze jak peněžní částku složit z mincí v Růžovém království. (Uvažujte, že království má k dispozici neomezené množství mincí.)* $\square$

Například takto: Bázickými prvky jsou $3 \in P$ a $13 \in P$. $\square$

K tomu přináleží dvě induktivní pravidla;

je-li $a \in P$, pak $a + 3 \in P$ a také $a + 13 \in P$. $\square$

b) *Dokažte, že z mincí v Růžovém království lze složit jakoukoliv celou částku od 24 korun výše.* $\square$

V řešení úkolu postačí dokázat toto tvrzení matematickou indukcí:

> **Věta**. Platí-li pro nějaké $n \geq 24$, že $24, 25, \ldots, n, n+1, n+2 \in P$, pak také $n + 3 \in P$. $\square$

Důkaz: V bázi indukce snadno vidíme, že částky $24 = 3 \cdot 8$, $25 = 13 + 3 \cdot 4$ a $26 = 13 \cdot 2$ náleží do P, a proto tvrzení platí pro $n = 24$. $\square$

V indukčním kroku z předpokladu $n \in P$ přímo odvodíme $n + 3 \in P$ (přidáme jednu tříkorunu) a jsme hotovi.

c) *Chytrý Honza přijel do Růžového království a potřebuje si tam koupit jeden knoflík za korunu. Jak to může udělat a neprodělat?*

□

Honza zaplatí 9 tříkorun (27) a nechá si vrátit 2 třináctikoruny (26). □

□

A na závěr jeden bonusový pro samostatné přemýšlení

Příklad 5.9. *Jak byste dokázali jasně a srozumitelně (explicitně) popsat množinu D zadanou následující induktivní definici?* □

- *Bázickými prvky jsou $21 \in D$ a $35 \in D$.*
- *Máme dvě induktivní pravidla:*
  - *Jsou-li $a, b \in D$ (je možné $a = b$), pak také $a + b \in D$.*
  - *Jsou-li $a, b \in D$ a platí $a > b$, pak také $a - b \in D$.* □

Pokud už máte odpověď, pak přemýšlejte, co se stane, když bázickými prvky bude jiná dvojice přirozených čísel. □
A co když v bázi zadáme trojici nebo čtveřici čísel? □