10. Kvadratické formy

Kvadratické formy

1. Definice a příklady
2. Základní vlastnosti
3. Matice kvadratické formy
4. Diagonální tvar matice kvadratické formy
5. Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$
6. Pozitivně definitní kvadratické formy
7. Diagonální redukce pozitivně definitní matice
8. $\mathbf{LDL}^\top$ rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí
9. Kongruence symetrické a diagonální matice
10. Zákon setrvačnosti kvadratických forem

10.1 Definice a příklady

DEFINICE 1

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor a nechť B je bilineární forma na $\mathcal{V}$. Zobrazení Q_B definované pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ předpisem

$$Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

se nazývá *kvadratická forma* příslušná bilineární formě B. Kvadratickou formou budeme stručně nazývat zobrazení Q definované na $\mathcal{V}$, pro které existuje bilineární forma B na $\mathcal{V}$ tak, že $Q = Q_B$.

Kvadratickou formu můžeme považovat za zobecnění funkce $y = ax^2$ na vektorové prostory.

10.1 Definice a příklady

PŘÍKLAD 1 Na prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 je definováno zobrazení Q, které každému vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

což je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované v příkladě 1 o bilineárních formách. Interpretujeme-li **x** jako polohový vektor, pak $Q(\mathbf{x})$ je druhá mocnina jeho délky.

PŘÍKLAD 2 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každému sloupcovému vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze dvě přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1 x_2 + a_{22}x_2^2$$

je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované v příkladě 2 o bilineárních formách.

PŘÍKLAD 3 Nechť $\mathcal{F}$ je prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé funkci $f \in \mathcal{F}$ přiřazuje

$$Q(f) = f(1)^2 + f(2)^2,$$

definuje kvadratickou formu příslušnou bilineární formě definované v příkladě 3 o bilineárních formách.

10.2 Základní vlastnosti

LEMMA 1 Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor. Pro každou kvadratickou formu Q na $\mathcal{V}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ a reálné α platí

$$Q(\alpha \mathbf{x}) = \alpha^2 Q(\mathbf{x})$$

DŮKAZ: Pro každou bilineární formu B na $\mathcal{V}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ a reálné α platí $B(\alpha \mathbf{x}, \alpha \mathbf{x}) = \alpha^2 B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Je-li $Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pak platí tvrzení věty.

DŮSLEDEK: Z věty bezprostředně plyne, že

$$Q(\mathbf{o}) = Q(0 \cdot \mathbf{o}) = 0$$

a že obor hodnot $\mathcal{H}(Q)$ každé kvadratické formy Q obsahuje s každým číslem i jeho nezáporné násobky. Obor hodnot *nulové kvadratické formy* definované předpisem $Q(\mathbf{x}) = 0$ obsahuje pouze číslo 0.

10.2 Základní vlastnosti

VĚTA 1
Pro každou bilineární formu B na $\mathcal{V}$ a jí příslušnou kvadratickou formu Q_B a libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ platí
$$B^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(Q_B(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q_B(\mathbf{x}) - Q_B(\mathbf{y})\big).$$

DŮKAZ: Tvrzení přímo vyplývá z rovnice
$B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, neboť pak
$Q_B(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q_B(\mathbf{x}) + 2B^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Q_B(\mathbf{y})$.

Jelikož pro libovolnou symetrickou bilineární formu B na $\mathcal{V}$ platí $B = B^{\mathrm{S}}$, plyne z věty 1, že každá symetrická bilineární forma B na $\mathcal{V}$ je plně určena svou kvadratickou formou. Při studiu kvadratických forem se můžeme omezit na kvadratické formy příslušné symetrickým bilineárním formám, neboť pro libovolnou bilineární formu B na $\mathcal{V}$ a $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí $Q_B(\mathbf{x}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

10.3 Matice kvadratické formy

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a nechť Q je daná kvadratická forma příslušná bilineární formě B. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} .$$

Je proto přirozené považovat matici $[B]_{\mathcal{E}}$ za matici kvadratické formy Q příslušné bilineární formě B v bázi $\mathcal{E}$. Podle věty 1 však kvadratická forma příslušná B přísluší též symetrické části B^{S} bilineární formy B. Proto definujeme *matici kvadratické formy* Q_B příslušné k bilineární formě B jako symetrickou matici

$$[Q_B] = \left[B^{\mathrm{S}}\right] .$$

Při studiu matic kvadratických forem se tedy můžeme omezit na symetrické matice.

10.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

Při studiu kvadratických forem chceme určit, jakých hodnot může nabývat daná kvadratická forma. Máme-li matici kvadratické formy v diagonálním tvaru, pak se hodnota kvadratické formy v daném vektoru vypočte jako součet druhých mocnin souřadnic tohoto vektoru (kladné hodnoty) násobených diagonálními prvky.

Například kvadratická forma z příkladu 1

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} = 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_3^2 > 0$$

pro libovolný vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Není-li matice kvadratické formy v *diagonálním (kanonickém) tvaru*, můžeme se pokusit upravit formu na *diagonální (kanonický) tvar*, ze kterého lze obor hodnot poznat.

10.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

Například *doplňováním čtverců* formy $Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$ dostaneme pro $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$

$$Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = -2\Big(x_1^2 - 2x_1(\frac{1}{2}x_2) + (\frac{1}{2}x_2)^2\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}x_2^2 - 3x_2^2 = -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{5}{2}x_2^2 = -2y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2,$$

takže $Q(\mathbf{x}) < 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Zapíšeme-li si substituci $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2, y_2 = x_2$ ve tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jelikož $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{S}}$, kde $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}})$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$ a označíme-li $\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ v nové bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, která je určena maticí zpětného přechodu $\mathbf{T}$ od $\mathcal{E}$ k $\mathcal{S}$, pak platí

$$[Q]_{\mathcal{S}} = \mathbf{T}^\top [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}.$$

To lze ověřit:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

K matici zpětného přechodu $\mathbf{T}$ můžeme určit matici přechodu $\mathbf{S}$ od báze $\mathcal{S}$ k bázi $\mathcal{E}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterou můžeme také zapsat ve tvaru $\mathbf{S} = \left[[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{S}}, [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{S}}\right]$.

Odtud

$$\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{S}} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{S}}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{S}} = \left[\mathbf{s}_2^{\mathbf{S}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jelikož Q je kvadratická forma příslušná symetrické bilineární formě

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2,$$

můžeme ověřit výpočtem, že

$$B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -2, \quad B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -\frac{5}{2},$$

tedy

$$[Q]_{\mathcal{E}} = [Q_B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

10.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Libovolnou kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ můžeme zapsat buďto pomocí složek ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \qquad\qquad (*)$$

nebo maticově ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Matici $\mathbf{A}$ přitom můžeme považovat za matici Q ve standardní bází $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}})$. Budeme se zabývat otázkou, na jaký tvar lze redukovat matici $\mathbf{A}$ přechodem ke vhodné nové bázi. Pro zjednodušení výkladu budeme předpokládat, že některý nenulový koeficient formy Q je roven jedné.
Předpokládejme nejprve, že $a = 1$, takže doplněním čtverců můžeme upravit $(*)$ na tvar

$$Q(\mathbf{x}) = \left(x_1^2 + 2x_1(bx_2) + (bx_2)^2\right) + (c - b^2)x_2^2 = (x_1 + bx_2)^2 + (c - b^2)x_2^2.$$

10.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Jestliže $c - b^2 \neq 0$, pak pomocí substituce

$$y_1 = x_1 + bx_2, \quad y_2 = \sqrt{|c - b^2|}x_2$$

dostaneme jeden z tvarů

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2, \quad Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - y_2^2.$$

Zapíšeme-li si tuto substituci v maticovém tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & \sqrt{|c - b^2|} \end{bmatrix},$$

můžeme provedenou úpravu zapsat též v maticovém tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y},$$

kde **D** je jedna z matic

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matici **T** přitom můžeme považovat za matici zpětného přechodu od nové báze $\mathcal{E}$ ke standardní bázi $\mathcal{S}$.

10.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Jestliže $c - b^2 = 0$, pak pomocí substituce $y_1 = x_1 + bx_2,\ y_2 = x_2$ dostaneme $Q(\mathbf{x}) = y_1^2$.

Zapíšeme-li si tuto substituci opět v maticovém tvaru s

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

můžeme formu zapsat též v maticovém tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y},$$

s maticí

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pro $a = 0$ a $c \neq 0$ stačí zopakovat předchozí úvahy s tím, že zaměníme a s c a x_1 s x_2.

10.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Pokud $a = c = 0$, pak položíme-li $x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2$, dostaneme

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - y_2^2.$$

Odtud najdeme transformaci $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, kterou můžeme považovat za přechod k souřadnicím v nové bázi s maticí zpětného přechodu

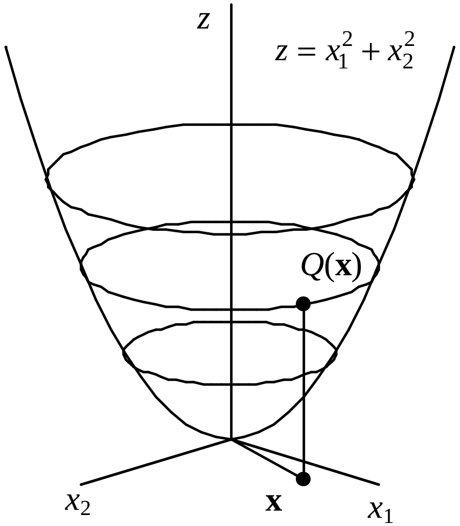
$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lze ověřit, že v nové bázi má forma matici $\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$.

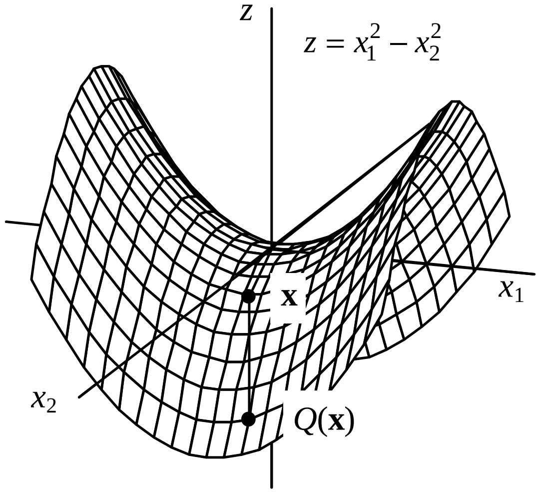
Zahrneme-li i nulovou kvadratickou formu,pak každou kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ můžeme redukovat vhodnou substitucí či přechodem k jiné bázi na jeden z tvarů

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \;\; Q_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2, \;\; Q_3(\mathbf{x}) = x_1^2, \;\; Q_4(\mathbf{x}) = 0,$$

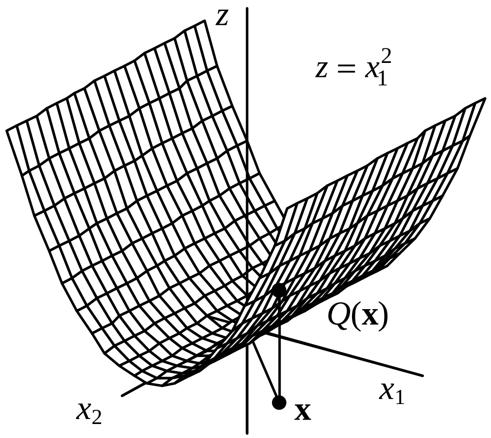
10.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$



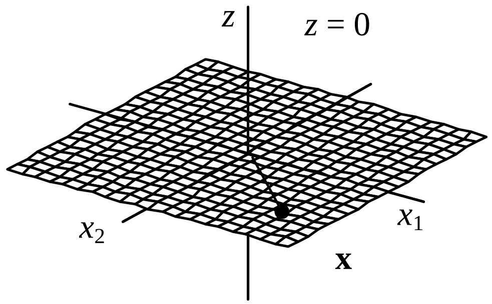
a) Eliptická forma $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$



b) Hyperbolická forma $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$



c) Parabolická forma $Q(\mathbf{x}) = x_1^2$



d) Nulová forma $Q(\mathbf{x}) = 0$

10.6 Pozitivně definitní formy

DEFINICE 2
Kvadratická forma Q na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *pozitivně definitní*, jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $Q(\mathbf{x}) > 0$. Jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí $Q(\mathbf{x}) \geq 0$, pak se Q nazývá *pozitivně semidefinitní*.

PŘÍKLAD 4 Kvadratická forma z příkladu 1 je pozitivně definitní.

PŘÍKLAD 5 Kvadratická forma $-Q$ definovaná na $\mathbb{R}^2$ předpisem $Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$ je pozitivně definitní.

PŘÍKLAD 6 Kvadratická forma z příkladu 3 nabývá pouze nezáporných hodnot, avšak $Q(f) = 0$ například pro nenulovou funkci $f(x) = (x-1)(x-2)$. Kvadratická forma je proto pouze pozitivně semidefinitní.

10.6 Pozitivně definitní formy

LEMMA 2 Je-li $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathcal{E}$ a je-li Q je pozitivně definitní kvadratická forma, pak pro libovolné $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \neq \mathbf{o}$ a

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} > 0.$$

DEFINICE 3
Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ budeme nazývat *pozitivně definitní*, jestliže pro každý sloupcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, a *pozitivně semidefinitní*, jestliže $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro libovolný sloupcový vektor $\mathbf{x}$.

Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní (semidefinitní), právě když je její matice v libovolné bázi pozitivně definitní (semidefinitní).

10.6 Pozitivně definitní formy

LEMMA 3 Každá pozitivně definitní matice má kladnou diagonálu.

DŮKAZ: Je-li $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ pozitivně definitní matice, pak pro libovolný sloupec $\mathbf{s} = \mathbf{s}_i^{\mathbf{I}}$ jednotkové matice platí $0 < \mathbf{s}^\top \mathbf{A} \mathbf{s} = a_{ii}$.

Je-li **D** diagonální matice s diagonálními prvky $d_1, \ldots, d_n$ a $\mathbf{x} = [x_i]$, pak

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{D} \mathbf{x} = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2.$$

Matice **D** je tedy pozitivně definitní, právě když $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$. Symetrická matice kongruentní s diagonální maticí je pozitivně definitní (semidefinitní), právě když tato diagonální matice má kladné (nezáporné) diagonální prvky.

Kvadratická forma Q resp. matice **A** se nazývá *negativně definitní (semidefinitní)*, právě když je $-Q$, resp. $-\mathbf{A}$ pozitivně definitní (semidefinitní). Nesplňuje-li ani jednu z uvedených vlastností, pak se nazývá *indefinitní*.

10.7 Diagonální redukce pozitivně definitní matice

Pro další studium kongruencí použijeme elementární řádkové operace a jejich maticový zápis. Ke každé elementární operaci však budeme následně uvažovat její sloupcovou variantu a místo o elementárních operacích budeme mluvit o *elementárních kongruencích*.

Je-li tedy $\mathbf{T}$ matice některé elementární operace s řádky čtvercové matice $\mathbf{A}$, pak matici upravenou příslušnou elementární kongruencí lze zapsat ve tvaru $\mathbf{TAT}^\top$.

VĚTA 2

Nechť $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní matice. Pak existuje regulární dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ s kladnou diagonálou tak, že

$$\mathbf{LAL}^\top = \mathbf{D}.$$

10.7 Diagonální redukce pozitivně definitní matice

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná pozitivně definitní matice řádu n.
Podle Lemmatu 4 má každá pozitivně definitní matice kladné diagonální prvky, takže $a_{11} > 0$.
S pomocí maticového zápisu elementárních operací najdeme, stejně jako v důkazu věty o LU rozkladu, dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}_1$, pro kterou platí

$$\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jelikož $\mathbf{A}$ je symetrická, plyne odtud, že matice $(\mathbf{L}_1\mathbf{A})^\top = \mathbf{A}\mathbf{L}_1{}^\top$ má stejný první sloupec jako $\mathbf{A}$,takže

$$\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1{}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$$

10.7 Diagonální redukce pozitivně definitní matice

DŮKAZ (*Pokračování*):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}_1$ je symetrická, jelikož je kongruentní se symetrickou maticí $\mathbf{A}$, a pozitivně definitní, neboť pro každý vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, platí

$$0 < \mathbf{x}^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1{}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_1 \mathbf{y}.$$

Opakováním tohoto postupu najdeme dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_{n-1}$ tak, že pro $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1$ platí $\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{L}^\top = \mathbf{D}$.
Jelikož $\mathbf{L}$ je součin regulárních dolních trojúhelníkových matic, je $\mathbf{L}$, také dolní trojúhelníková matice. $\square$

10.7 Diagonální redukce pozitivně definitní matice

PŘÍKLAD 7 Najděte diagonální matici **D**, která je kongruentní s pozitivně definitní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ŘEŠENÍ: Matici **A** upravíme spolu s jednotkovou maticí na horní trojúhelníkovou matici. Dostaneme:

$$\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{I}\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{lrr|lll} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{2}{3}\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{llr|lll} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right].$$

10.7 Diagonální redukce pozitivně definitní matice

PŘÍKLAD 7 *(Pokračování)*

Snadno si ověříme, že pro

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{LAL}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

10.8 $\mathrm{LDL}^\top$ rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí

Rozklad $\mathbf{LDL}^\top$ je základem efektivních algoritmů pro řešení soustav s pozitivně definitními maticemi, neboť je ekvivalentní rozkladům $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}^\top\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}$ nebo $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{L}}^\top, \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$.

PŘÍKLAD 8 Využijte řešení příkladu 7 k řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Matice soustavy $\mathbf{A}$ je stejná jako matice $\mathbf{A}$ z příkladu 7, takže platí $\mathbf{LAL}^\top = \mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{L}^{-\top}$. Označíme-li si $\mathbf{b}$ pravou stranu soustavy můžeme si vyjádřit její řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{L}^\top\left(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Lb})\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soustava má tedy řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

10.9 Kongruence symetrické a diagonální matice

VĚTA 3
Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je symetrická matice. Pak existuje regulární matice **T** a diagonální matice **D** tak, že

$$\mathbf{TAT}^\top = \mathbf{D}.$$

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je symetrická matice řádu n. Jestliže $a_{11} = 0$ a některý mimodiagonální prvek $a_{i1} = a_{1i}$ je nenulový, pak přičtením nebo odečtením i-tého řádku k prvnímu řádku a následným provedením obdobné operace se sloupci můžeme dostat do levého horního rohu nenulový prvek. Maticový zápis takové úpravy má tvar

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_{ij}] = \mathbf{G}_1 \mathbf{A} \mathbf{G}_1^\top,$$

kde $\bar{a}_{11} \neq 0$ a $\mathbf{G}_1$ je matice, která při násobení zleva realizuje přičtení nebo odečtení prvního řádku k nebo od řádku i.

10.9 Kongruence symetrické a diagonální matice

DŮKAZ *(Pokračování)*: Pokud $a_{11} \neq 0$, pak položíme $\mathbf{G}_1 = \mathbf{I}$. Jelikož $\bar{a}_{11} \neq 0$, pak najdeme, stejně jako v důkazu věty 2, dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}_1$ tak, že

$$\mathbf{L}_1 \bar{\mathbf{A}} \mathbf{L}_1{}^\top = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Pro $\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{G}_1$ tedy platí

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}_1^\top = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Celý postup můžeme opakovat, nejprve s maticí $\mathbf{A}_1$, k postupné eliminaci mimodiagonálních prvků, až po $n-1$ krocích dostaneme pro

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{n-1} \cdots \mathbf{T}_1$$

rovnost $\mathbf{TAT}^\top = \mathbf{D}$. $\square$

10.9 Kongruence symetrické a diagonální matice

PŘÍKLAD 9 Najděte regulární matici **T** a diagonální matici **D** tak, aby pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

platilo

$$\mathbf{TAT}^\top = \mathbf{D}.$$

ŘEŠENÍ: Matici **A** nejprve upravíme na diagonální tvar pomocí elementárních kongruencí.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} +\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} +\mathrm{s}_2 & & \end{array}\end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & -\frac{1}{2}\mathrm{s}_1 & -\frac{1}{2}\mathrm{s}_1 \end{array}\end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & +\mathrm{s}_2 \end{array}\end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.9 Kongruence symetrické a diagonální matice

PŘÍKLAD 9 *(Pokračování)*

Matici $\mathbf{T}$ najdeme tak, že řádkové operace, které jsme použili k úpravě $\mathbf{A}$, postupně provedeme na jednotkové matici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \end{matrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}.$$

Snadno si ověříme, že platí

$$\mathbf{TAT}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

10.9 Kongruence symetrické a diagonální matice

DŮSLEDEK: Nechť Q je libovolná kvadratická forma na vektorovém prostoru konečné dimenze. Pak existuje báze $\mathcal{F}$ prostoru $\mathcal{V}$ tak, že $[Q]_{\mathcal{F}}$ je diagonální.

DŮKAZ: Nechť $\mathcal{E}$ je libovolná báze prostoru $\mathcal{V}$. Jelikož $[Q]_{\mathcal{E}}$ je symetrická matice, existuje podle věty 3 regulární matice $\bar{\mathbf{S}}$ tak, že $\bar{\mathbf{S}}\,[Q]_{\mathcal{E}}\,\bar{\mathbf{S}}^\top = \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice.
To však je pro $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}^\top$ ekvivalentní vztahu $\mathbf{S}^\top [Q]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{S} = \mathbf{D}$.
Je-li $\mathcal{F}$ báze $\mathcal{V}$ definovaná maticí přechodu $\mathbf{S}$, pak platí $[Q]_{\mathcal{F}} = \mathbf{S}^\top\,[Q]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{S} = \mathbf{D}$.

10.10 Zákon setrvačnosti kvadratických forem

VĚTA 4
Nechť $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ jsou diagonální matice řádu n s diagonálami $d_1, \ldots, d_n$ a $e_1, \ldots, e_n$. Nechť $\mathbf{T}$ je regulární a $\mathbf{D} = \mathbf{T}^\top \mathbf{E} \mathbf{T}$. Pak počet kladných, záporných i nulových prvků na diagonálách obou matic je shodný.

DŮKAZ: Jelikož násobení regulární maticí zachovává hodnost matice, obě matice mají stejný počet h nenulových prvků. Budeme předpokládat, že diagonály jsou uspořádány tak, že

$$\begin{array}{ll} d_1 > 0, \ldots, d_p > 0 & d_{p+1} < 0, \ldots, d_h < 0, \\ e_1 > 0, \ldots, e_q > 0 & e_{q+1} < 0, \ldots, e_h < 0. \end{array}$$

V opačném případě je přeuspořádáme pomocí elementárních kongruencí odvozených z výměny řádků.

10.10 Zákon setrvačnosti kvadratických forem

DŮKAZ *(Pokračování)*:
Dále budeme předpokládat, že **T** je regulární matice taková, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^\top \mathbf{E}\mathbf{T}.$$

Kdyby $p < q$, pak by existovalo řešení **x** soustavy rovnic

$$x_1 = 0, \ldots, x_p = 0, \quad \mathbf{r}_{q+1}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_{q+1} = 0, \ldots, \mathbf{r}_h^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_h = 0,$$

které má některou z prvních h složek nenulovou, neboť podle předpokladu je rovnic méně než h.
Musí to být zřejmě některá ze složek $x_{p+1}, \ldots, x_h$ takže platí

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{D}\mathbf{x} < 0, \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{E}\mathbf{T}\mathbf{x} \geq 0,$$

což je spor s předpokladem.