14. Úvod do analytické geometrie

Úvod do analytické geometrie

1. Eukleidovský prostor
2. Přímky v $\mathcal{E}_3$
3. Roviny v $\mathcal{E}_3$
4. Vektorový součin
5. Určení některých úhlů
6. Některé metrické úlohy

14.1 Eukleidovský prostor

DEFINICE 1

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ se skalárním součinem, množina bodů $\mathcal{E}$ a zobrazení

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathcal{V}.$$

Množina $\mathcal{E}$ se nazývá *eukleidovský bodový prostor se zaměřením* $\mathcal{V}$, *jestliže platí:*

A1 *Ke každému* $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$ *a* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *existuje jediný bod* $\mathrm{B} \in \mathcal{E}$ *tak, že*

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{v}.$$

A2 *Pro libovolné body* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{E}$ *platí*

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

14.1 Eukleidovský prostor

Z axiómů lze odvodit rovnosti, které odpovídají naší intuici.
Například pro libovolné body $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{E}$ platí

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{o}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}.$$

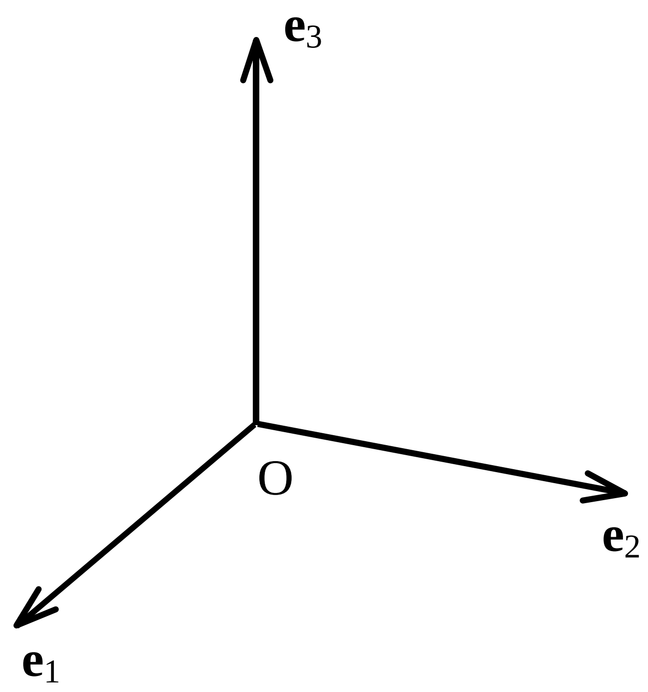
Zvolíme-li si libovolný bod $\mathrm{O} \in \mathcal{E}_3$ a ortonormální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ zaměření $\mathcal{E}_3$, pak zobrazení

$$\mathcal{E}_3 \ni \mathrm{A} \mapsto \left[\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^3$$

bude každému bodu A přiřazovat jednoznačně aritmetický vektor.
Bod O se nazývá *počátek soustavy souřadnic* a čtveřice $(\mathrm{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *kartézská soustava souřadnic* $\mathcal{E}_3$. S její pomocí můžeme $\mathcal{E}_3$ i jeho zaměření ztotožnit s prostorem třírozměrných aritmetických vektorů se standardním skalárním součinem definovaným předpisem $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

14.1 Eukleidovský prostor

Abychom mohli jednoznačně definovat nové operace v původním eukleidovském bodovém prostoru pomocí souřadnic, musíme specifikovat tzv. *orientaci* soustavy souřadnic. Budeme používat výhradně *pravotočivé soustavy souřadnic*, jejichž bázové vektory lze umístit po řadě ve směru palce, ukazováku a prostředníku pravé ruky (viz obrázek)



14.2 Přímky v $\mathcal{E}_3$

Nechť $\mathrm{A} \in \mathcal{E}_3$ je zadaný bod a $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_3$ zadaný nenulový vektor. Pak *přímka* p procházející bodem A se *směrem* **u** je množina

$$p = \{\mathrm{A} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Rozepíšeme-li si tento zápis po složkách, dostaneme pro body $\mathrm{X} = [X_1, X_2, X_3]$ přímky p procházející bodem $\mathrm{A} = [A_1, A_2, A_3]$ ve směru $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ tzv. *parametrické rovnice přímky*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & = & A_1 & + & tu_1 \\ X_2 & = & A_2 & + & tu_2 \\ X_3 & = & A_3 & + & tu_3, \end{array}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ se nazývá *parametr*.

14.2 Přímky v $\mathcal{E}_3$

Nechť p a q jsou přímky zadané předpisy

$$p = \{\mathrm{A} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \text{ a } q = \{\mathrm{B} + s\mathbf{v} : s \in \mathbb{R}\}.$$

Přímky p a q nemají *žádný společný bod*, právě když soustava

$$\mathrm{A} + t\mathbf{u} = \mathrm{B} + s\mathbf{v}$$

nemá řešení, což nastane, právě když

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] < h[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}]. \tag{1}$$

Platí-li (1) a $h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2$, pak jsou p a q *mimoběžné*.

Když platí (1) a $h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1$, pak jsou p a q *rovnoběžné*.

Přímky p a q *mají alespoň jeden společný bod*, právě když

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = h[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}]. \tag{2}$$

Platí-li (2) a $h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2$, pak p a q leží ve stejné rovině a mají společný jediný bod, takže jsou *různoběžné*.

Když platí (2) a $h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1$, pak jsou p a q *totožné*.

14.3 Roviny v $\mathcal{E}_3$

Nechť A je zadaný bod a **n** je zadaný nenulový vektor. Pak *rovina* procházející bodem A s normálovým vektorem **n** je množina

$$r = \{\mathrm{X} \in \mathcal{E}_3 : (\mathbf{n}, \overrightarrow{\mathrm{AX}}) = 0\}.$$

Rozepíšeme-li si tuto definici po složkách, dostaneme pro body $\mathrm{X} = [X_1, X_2, X_3]$ roviny r procházející bodem $\mathrm{A} = [A_1, A_2, A_3]$ s normálovým vektorem $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ *normálovou rovnici roviny*

$$n_1(X_1 - A_1) + n_2(X_2 - A_2) + n_3(X_3 - A_3) = 0$$

nebo *obecnou rovnici roviny*

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + d = 0,$$

kde

$$a = n_1, \quad b = n_2, \quad c = n_3 \text{ a } d = -n_1A_1 - n_2A_2 - n_3A_3.$$

14.3 Roviny v $\mathcal{E}_3$

Je-li dán bod A a dva nezávislé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, pak

$$r = \{\mathrm{A} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : t, s \in \mathbb{R}\}$$

definuje rovinu procházející body A, $\mathrm{A} + \mathbf{u}$ a $\mathrm{A} + \mathbf{v}$. Rozepíšeme-li si tento zápis po složkách, dostaneme pro body $\mathrm{X} = [X_1, X_2, X_3]$ roviny r *parametrické rovnice roviny*

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & = & A_1 & + & tu_1 & + & sv_1 \\ X_2 & = & A_2 & + & tu_2 & + & sv_2 \\ X_3 & = & A_3 & + & tu_3 & + & sv_3, \end{array}$$

v nichž můžeme snadno identifikovat souřadnice bodu A i vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Označme si r a s roviny

$$r = \{\mathrm{X} \in \mathcal{E}_3 : (\overrightarrow{\mathrm{AX}}, \mathbf{n}) = 0\} \text{ a } s = \{\mathrm{X} \in \mathcal{E}_3 : (\overrightarrow{\mathrm{BX}}, \mathbf{m}) = 0\}.$$

14.3 Roviny v $\mathcal{E}_3$

Roviny r a s nemají *žádný společný bod*, právě když soustava

$$(\mathbf{n}, \overrightarrow{\mathrm{AX}}) = 0 \text{ a } (\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathrm{BX}}) = 0$$

nemá žádné řešení. Rozepíšeme-li si rovnice soustavy na tvar

$$\begin{aligned} n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3 &= n_1A_1 + n_2A_2 + n_3A_3 \\ m_1X_1 + m_2X_2 + n_3X_3 &= m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3, \end{aligned}$$

lze ověřit, že to může nastat, jen když

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 1 \text{ a } (\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \neq 0.$$

V tomto případě jsou roviny *rovnoběžné*, ale *různé*.

Jestliže $h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 2$, pak roviny r a s jsou *různoběžné* a mají společnou přímku, jejíž směrový vektor je ortogonální k m a n.

Jestliže

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 1 \text{ a } (\mathbf{m}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0,$$

pak jsou roviny r a s *totožné*.

14.3 Roviny v $\mathcal{E}_3$

Podobně můžeme podat výčet možností vzájemné polohy přímky p procházející bodem A se směrem **u** a roviny r procházející bodem B s normálovým vektorem **n**.

Snadno se ověří, že přímka p má *jediný společný bod* s r, právě když

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) \neq 0. \qquad \textbf{(*)}$$

Jestliže neplatí (*), pak lze rozlišit dva případy.

Buď je přímka p *rovnoběžná* s r, ale neleží v r, což nastane když

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0 \text{ a } (\mathbf{n}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \neq 0,$$

nebo p leží v r, což nastane, když

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0 \text{ a } (\mathbf{n}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0.$$

14.4 Vektorový součin

DEFINICE 2

Vektor $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ takový, že

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

se nazývá *vektorový součin* vektorů **u** a **v** a budeme ho značit

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Lze snadno ukázat, že $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k **u** i **v**.

Pro vektorový součin si můžeme zapamatovat jeho mnemotechnický zápis

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

14.4 Vektorový součin

Geometrickým významem vektorového součinu je např. obsah rovnoběžníka či trojúhelníka. Poněvadž má rovnoběžnostěn výšku $\|\mathbf{w}\|$ a plochu *základny*

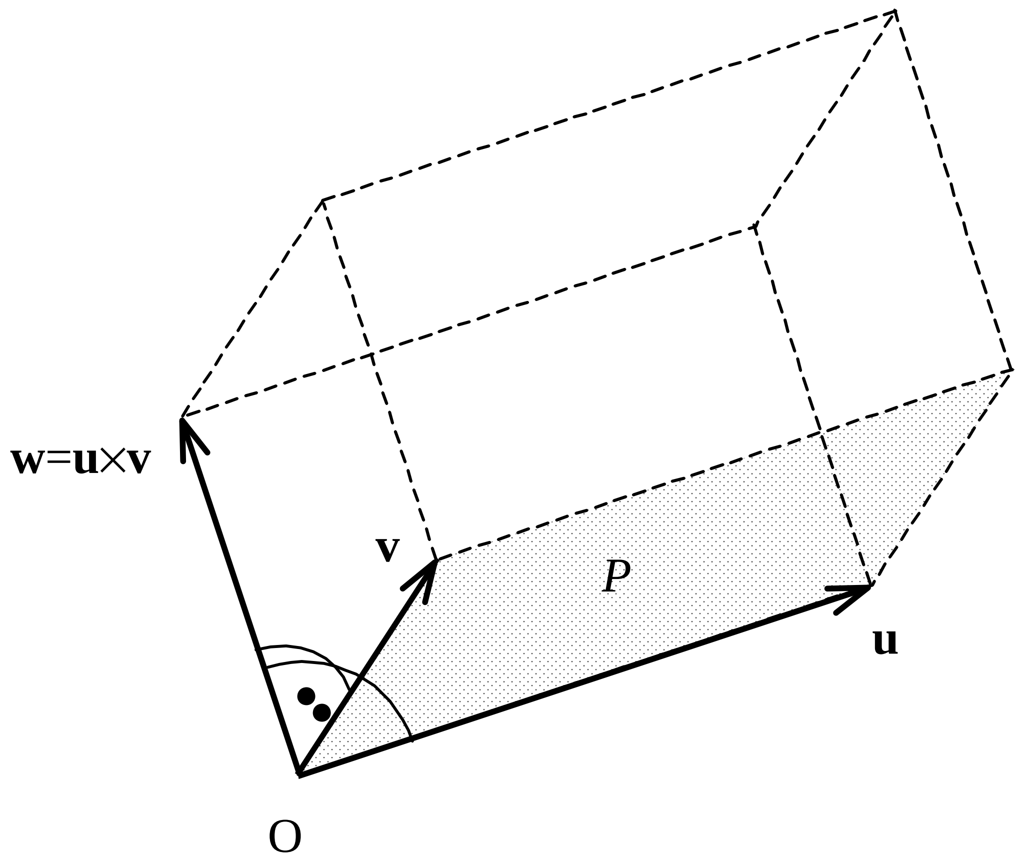
$$P = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha,$$

kde α je odchylka přímek procházejících počátkem O se směrovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, platí

$$P = \|\mathbf{w}\|.$$

Například plocha P trojúhelníka určeného body $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{E}_3$ je dána vzorcem

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\|.$$



14.5 Určení některých úhlů

Odchylka přímek p a q se směrovými vektory **u** a **v** se definuje jako nejmenší odchylka dvou vektorů, které lze umístit na p nebo q, takže splňuje

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Obdobně se definuje *odchylka* φ *přímky* p se směrovým vektorem **u** *a roviny* r s normálovým vektorem **n**. Můžeme ji vypočítat pomocí odchylky přímky p a libovolné jiné přímky se směrovým vektorem **n** ze vztahu

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|(\mathbf{n},\mathbf{u})|}{\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{u}\|}.$$

Odchylka dvou rovin, což je nejmenší úhel dvou přímek, z nichž každá leží v jedné z rovin, vyjádříme snadno pomocí jejich normálových vektorů $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ a vztahu

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)|}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|}.$$

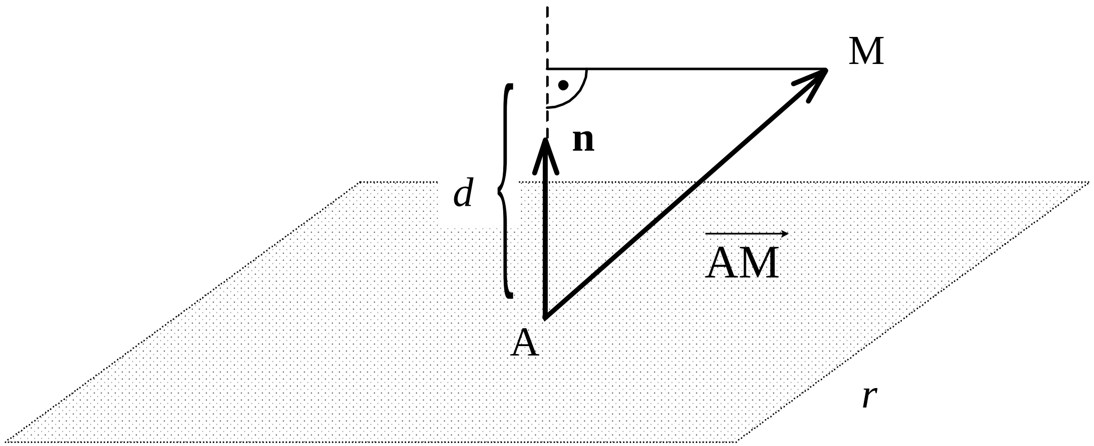
14.6 Některé metrické úlohy

K určení *vzdálenosti* d *bodu* M *od roviny*

$$r = \{\mathrm{X} \in \mathcal{E}_3 : (\overrightarrow{\mathrm{AX}}, \mathbf{n}) = 0\}$$

stačí najít průmět vektoru $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ do normálového směru **n**. Platí tedy

$$d = \frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|}.$$



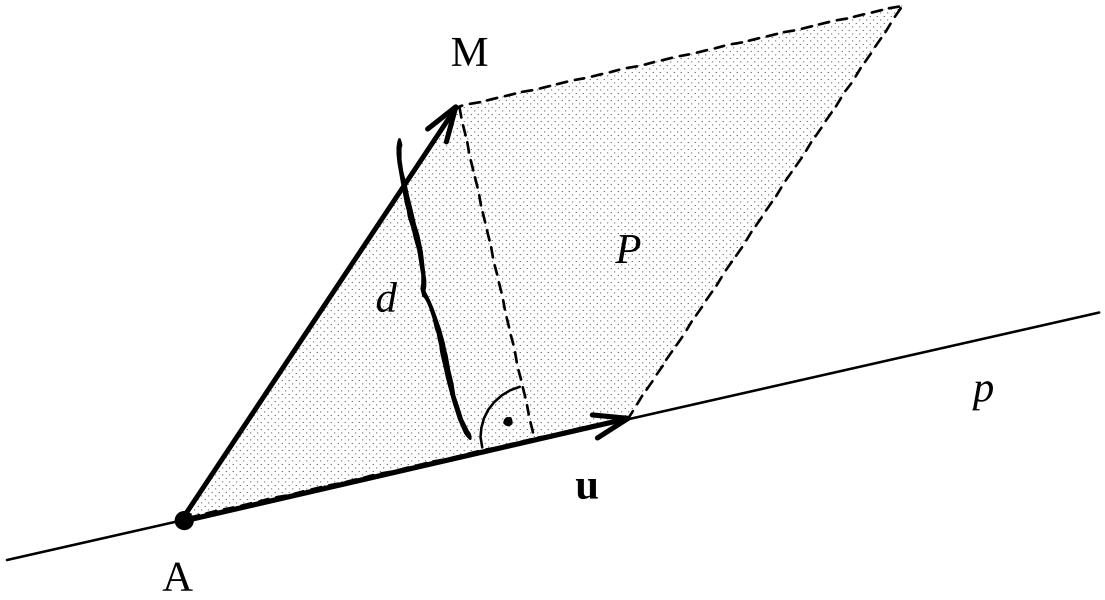
14.6 Některé metrické úlohy

Vzdálenost d *bodu* M *od přímky* p procházející bodem A se směrem **u** určíme s pomocí obrázku. Z

$P = \|\mathbf{u} \times \overrightarrow{\mathrm{AM}}\|$ a $P = \|\mathbf{u}\| \cdot d$

dostaneme snadno

$$d = \frac{\|\mathbf{u} \times \overrightarrow{\mathrm{AM}}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$



14.6 Některé metrické úlohy

Obdobně určíme i *nejkratší vzdálenost dvou mimoběžek* p a q, kde

$$p = \{\mathrm{A} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$$
$$q = \{\mathrm{B} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro objem V rovnoběžnostěnu určeného hranami $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí

$$V = |\det\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\right]| = P \cdot d,$$

zatímco pro plochu P jeho základny platí

$$P = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Odtud

$$d = \frac{V}{P} = \frac{|\det\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\right]|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}.$$