7. Dimenze a řešení soustav

Dimenze a řešení soustav

1. Dimenze vektorového prostoru
2. Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace
3. Řádkový prostor a řádková hodnost
4. Sloupcová hodnost matice
5. Hodnost a řešitelnost soustav
6. Hodnost a regularita
7. Hodnost matice a počítačová aritmetika

7.1 Dimenze vektorového prostoru

VĚTA 1
Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ a nechť $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ jsou nezávislé vektory prostoru $\mathcal{V}$. Pak $m \le n$.

DŮKAZ: Nechť platí předpoklady věty a $m > n$. Jelikož $\mathcal{V} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{V}$, lze $\mathbf{f}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, takže vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jsou závislé. Pak existuje k tak, že $\mathbf{e}_k$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$. Odtud snadno plyne, že každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$.
Jestliže tento postup zopakujeme s tím, že vezmeme v úvahu nezávislost vektorů $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$, ukáže se, že každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lze vyjádřit jako kombinaci $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ a některých $n-2$ vektorů vybraných z původní báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.
Kdyby $m > n$, dostali bychom po vyškrtání všech n vektorů báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, že každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lze vyjádřit pomocí vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Tak bychom však mohli vyjádřit $\mathbf{f}_{n+1}$ jako kombinaci $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, což je ve sporu s předpokladem, že $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ jsou nezávislé. Platí tedy $m \le n$ $\square$.

7.1 Dimenze vektorového prostoru

Z věty ihned plyne, že má-li nějaký vektorový prostor $\mathcal{V}$ bázi, pak počet vektorů této báze je maximálním počtem nezávislých vektorů prostoru $\mathcal{V}$ a *počet vektorů v různých bázích téhož vektorového prostoru je stejný*.

DEFINICE 1
Maximální počet nezávislých vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme *dimenzí* prostoru $\mathcal{V}$ a značíme ji $\dim \mathcal{V}$. Má-li vektorový prostor bázi, je jeho dimenze rovna počtu vektorů báze a mluvíme o *konečněrozměrném prostoru*. Podle naší definice platí $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$. Nemá-li nenulový vektorový prostor bázi, mluvíme o *nekonečněrozměrném prostoru*.

7.2 Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

VĚTA 2

Nechť $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ jsou vektory vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Označme $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. Pak platí následující tvrzení:

1. Vektor $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, právě když
$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = \dim \langle \mathcal{A} \rangle \qquad (*)$$
2. Jestliže platí (*) a $\mathcal{A}$ je nezávislá množina vektorů, pak lze vektor $\mathbf{b}$ vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$.
3. Jestliže platí (*) a $\mathcal{A}$ je závislá množina vektorů, pak lze vektor $\mathbf{b}$ vyjádřit nekonečně mnoha způsoby jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. V této kombinaci lze zvolit některých $d = k - \dim \langle \mathcal{A} \rangle$ koeficientů libovolně.

7.2 Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

DŮKAZ:

1. Jestliže $\mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že některý z vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ je různý od nuly. Pak postupným vyškrtáváním vektorů, které jsou kombinací ostatních, vybereme z $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ nějakou bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\langle \mathcal{A} \rangle$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{E} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$. Jestliže $\mathbf{b}$ nelze vyjádřit jako kombinaci vektorů báze $\mathcal{E}$, pak $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ tvoří bázi $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ a platí
$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = s + 1 \neq s = \dim \langle \mathcal{A} \rangle .$$
Naopak, jestliže $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako kombinaci $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$, pak $\mathcal{E}$ je báze $\langle \mathcal{A} \rangle$ i $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ a platí
$$\dim \langle \mathcal{A} \rangle = s = \dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle .$$
2. Jestliže platí **(*)** a $\mathcal{A}$ je nezávislá množina vektorů, pak $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ tvoří bázi $\langle \mathcal{A} \rangle$ a pak lze vektor $\mathbf{b}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Koeficienty lineární kombinace jsou určeny jednoznačně.

7.2 Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

DŮKAZ*(Pokračování)*: 3. Nechť platí (*). Předpokládejme opět, že $\mathcal{E} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ tvoří bázi $\langle \mathcal{A} \rangle$ a $s < k$. Pak platí $\mathbf{b} \in \langle \mathcal{A} \rangle$, takže pro libovolné $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_k$ platí také $\mathbf{b} - \xi_{s+1}\mathbf{a}_{s+1} - \cdots - \xi_k \mathbf{a}_k \in \langle \mathcal{A} \rangle$.
Existuje tedy $\xi_1, \ldots, \xi_s$ tak, že

$$\mathbf{b} - \xi_{s+1}\mathbf{a}_{s+1} - \cdots - \xi_k \mathbf{a}_k = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \xi_s \mathbf{a}_s .$$

Vektor $\mathbf{b}$ lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{b} = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \xi_k \mathbf{a}_k$$

s libovolnými $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_k$. Počet těchto koeficientů splňuje

$$d = k - s = k - \dim \langle \mathcal{A} \rangle . \quad \square$$

Věta obsahuje odpověď na otázku, kdy má soustava lineárních rovnic řešení, kdy má jediné řešení a kdy má nekonečně mnoho řešení, a to v termínech dimenze lineárních obalů sloupců matice soustavy a pravé strany. Stačí si za vektory $\mathbf{a}_i$ dosadit sloupce $\mathbf{s}_i^{\mathbf{A}}$ matice soustavy $\mathbf{A}$ a za $\mathbf{b}$ dosadit vektor pravé strany.

7.3 Řádkový prostor a řádková hodnost

DEFINICE 2
Lineární obal $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \left\langle \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \right\rangle$ řádků $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ dané matice **A** typu (m, n) nazýváme *řádkovým prostorem matice* **A**. Dimenze $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ se nazývá *řádková hodnost* matice **A**

VĚTA 3
Nechť matice **A** a **B** jsou řádkově ekvivalentní. Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$

Řádková hodnost matice **A** se elementárními řádkovými operacemi nemění a snadno ji určíme ze schodového tvaru matice **A**, neboť počet nenulových řádků matice ve schodovém či normovaném schodovém tvaru je zřejmě roven její řádkové hodnosti.

7.3 Řádkový prostor a řádková hodnost

PŘÍKLAD 1 Určete řádkovou hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ: Elementárními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{r}_1 \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Řádková hodnost matice **A** je tedy rovna dvěma.

7.4 Sloupcová hodnost matice

DEFINICE 3
Lineární obal $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \left\langle \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \right\rangle$ sloupců dané matice **A** typu (m, n) se nazývá *sloupcový prostor* matice **A**. Dimenze $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ se nazývá *sloupcová hodnost* matice **A**.

PŘÍKLAD 2 Srovnejme sloupcové prostory matice **A** a matice **B** z příkladu 1, které jsou řádkově ekvivalentní:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sloupcové prostory obou matic jsou různé, neboť například $\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} \notin \mathcal{S}(\mathbf{B})$.

7.4 Sloupcová hodnost matice

VĚTA 4
Nechť matice **A** a **B** jsou řádkově ekvivalentní. Pak
$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

DŮKAZ: Jestliže matice **A** a **B** typu (m, n) jsou řádkově ekvivalentní, pak jsou také rozšířené matice $\left[\mathbf{A}|\mathbf{o}\right]$ a $\left[\mathbf{B}|\mathbf{o}\right]$ řádkově ekvivalentní. Odtud
$$x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} = \mathbf{o},$$
právě když
$$x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} = \mathbf{o}.$$
Zde vidíme, že sloupce $\mathbf{s}_{i_1}^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_{i_k}^{\mathbf{A}}$ jsou nezávislé, právě když sloupce $\mathbf{s}_{i_1}^{\mathbf{B}}, \ldots, \mathbf{s}_{i_k}^{\mathbf{B}}$ jsou nezávislé.

7.4 Sloupcová hodnost matice

U matice ve schodovém tvaru je báze tvořena sloupci obsahujícími vedoucí prvky řádků a sloupce matice **A** s týmiž indexy tvoří pak bázi $\mathcal{S}(\mathbf{A})$.

PŘÍKLAD 3 Báze sloupcového prostoru matice **B** z příkladu 1 je tvořena sloupci

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

První dva sloupce

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

matice **A** proto tvoří bázi $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, neboť **A** a **B** jsou řádkově ekvivalentní.

7.5 Hodnost a řešitelnost soustav

Z vět 3 a 4 je zřejmá rovnost řádkové a sloupcové hodnosti. Budeme proto mluvit stručně o *hodnosti matice* a budeme ji značit $h(\mathbf{A})$.

VĚTA 5 (FROBENIOVA)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) a nechť $\mathbf{b}$ je m-rozměrný sloupcový vektor. Potom platí následující tvrzení:

1. Soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, právě když
$$h(\mathbf{A}) = h\big(\big[\mathbf{A}|\mathbf{b}\big]\big) \qquad (**)$$
2. Jestliže platí $(**)$ a $h(\mathbf{A}) = n$, potom má soustava jediné řešení.
3. Jestliže platí $(**)$ a $h(\mathbf{A}) < n$, potom má soustava nekonečně mnoho řešení. V řešení lze zvolit některých $d = n - h(\mathbf{A})$ složek libovolně.

7.6 Hodnost a regularita

VĚTA 6

Čtvercová matice **A** řádu n je regulární, právě když

$$h(\mathbf{A}) = n.$$

DŮKAZ: Nechť **A** je čtvercová matice řádu n. Jestliže **A** má hodnost n, potom podle věty 5 má každá soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{s}_k^{\mathbf{I}}$ jediné řešení, takže i soustava **AX**=**I** má jediné řešení. Odtud je matice **A** regulární. Obráceně, jestliže **A** je regulární, potom pro libovolný sloupcový vektor **y** a $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ platí

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}},$$

takže **A** má sloupcovou hodnost n.

7.7 Hodnost matice a počítačová aritmetika

Pojem hodnosti předpokládá přesnou aritmetiku, neboť nepatrná změna matice může způsobit změnu její hodnosti.

PŘÍKLAD 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-99} & 10^{-99} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-98} & 10^{-99} \end{bmatrix}$$

Matice se liší jen velmi málo, avšak $h(\mathbf{A}) = 1$ a $h(\mathbf{B}) = 2$

Pokud jsou koeficienty matice výsledkem měření, nemá proto často vůbec smysl hovořit o hodnosti matice. Pro takové aplikace, stejně jako pro počítačové řešení soustav, byla proto vypracována teorie založená na jiných pojmech, se kterou se seznámíme později.