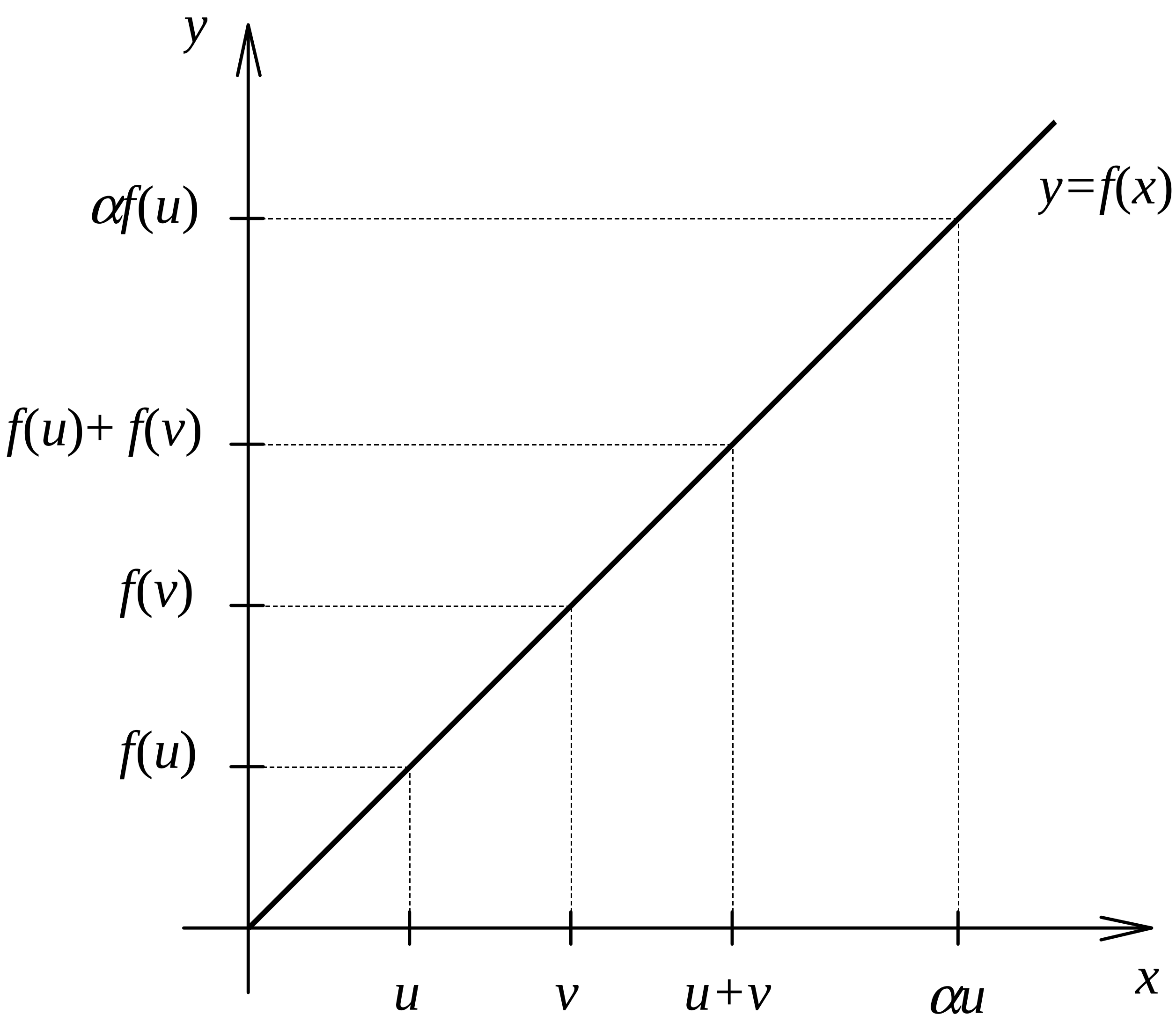
8. Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

1. Definice a příklady
2. Elementární vlastnosti lineárního zobrazení
3. Derivace a integrál po částech lineárních funkcí
4. Nulový prostor a obor hodnot
5. Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení
6. Matice lineárního zobrazení
7. Změna báze
8. Podobnost matic

8.1 Definice a příklady



8.1 Definice a příklady

DEFINICE 1

Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ jsou vektorové prostory. Zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ se nazývá *lineární zobrazení (operátor)*, jestliže pro každé dva vektory $u, v \in \mathcal{U}$ a skalár α platí:

1. $A(u + v) = A(u) + A(v)$
2. $A(\alpha u) = \alpha A(u)$

Lineární zobrazení $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ se často nazývá *lineární transformace*. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ do vektorového prostoru $\mathcal{V}$ budeme značit $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Místo $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ budeme psát stručně $\mathcal{L}(\mathcal{U})$. Lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ do $\mathbb{R}$ se nazývají *lineární formy* nebo *lineární funkcionály*.

8.1 Definice a příklady

PŘÍKLAD 1 Funkce $y = ax$ je lineární transformace $\mathbb{R}$ pro libovolné pevně zvolené $a \in \mathbb{R}$, neboť

$$a(u+v) = au + av \quad \text{a} \quad a(\alpha u) = \alpha a u$$

pro libovolná čísla u, v a α.

PŘÍKLAD 2 Funkce $f : y = 2x + 1$ není lineární transformace $\mathbb{R}$, neboť $f(2+2) = f(4) = 9 \neq 10 = f(2) + f(2)$.

PŘÍKLAD 3 Je-li **A** libovolná reálná $m \times n$ matice, $\mathbb{R}^{n,1}(\mathbb{R}^{m,1})$ prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze $n(m)$, pak je

$$A : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

lineární zobrazení, neboť pro libovolné vektory **x** a **y** platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

8.2 Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

VĚTA 1
Nechť $\mathcal{U},\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory. Pro libovolné lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ a $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ platí

1. $A(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$
2. $A(-\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v})$

DŮKAZ:

1. $A(\mathbf{o}) = A(0 \cdot \mathbf{o}) = 0 \cdot A(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$
2. $A(-\mathbf{v}) = A\big((-1) \cdot \mathbf{v}\big) = (-1) \cdot A(\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v})$

8.2 Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

VĚTA 2
Jestliže $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, pak pro libovolné skaláry $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ a vektory $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ platí

$$A(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\alpha_1A(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_nA(\mathbf{v}_n).$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}A(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n) &= A\big(\alpha_1\mathbf{v}_1+(\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)\big)=\\ &=A(\alpha_1\mathbf{v}_1)+A(\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\\ &=\alpha_1A(\mathbf{v}_1)+A(\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\cdots=\\ &=\alpha_1A(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_nA(\mathbf{v}_n).\end{aligned}$$

Všechna lineárních zobrazení definovaná na prostorech konečné dimenze jsou úplně určeny obrazy vektorů libovolné báze, tedy obrazy konečného počtu vektorů.

8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí

PŘÍKLAD 4 Zobrazení $D : \mathcal{P}_{n+1} \mapsto \mathcal{P}_n$ definované předpisem

$$D : p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mapsto p'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1$$

je lineární.

Opravdu pro $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ a $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ je
$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_0 + b_0)$,
$(\alpha p)(x) = (\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_0)$ a

1. $D(p+q) = n(a_n + b_n)x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) =$
$$= n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 + n b_n x^{n-1} + \cdots + b_1 =$$
$$= p'(x) + q'(x) = D(p) + D(q)$$
2. $D(\alpha p) = n(\alpha a_n)x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1) = \alpha(n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1) =$
$$= \alpha p'(x) = \alpha D(p).$$

8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí

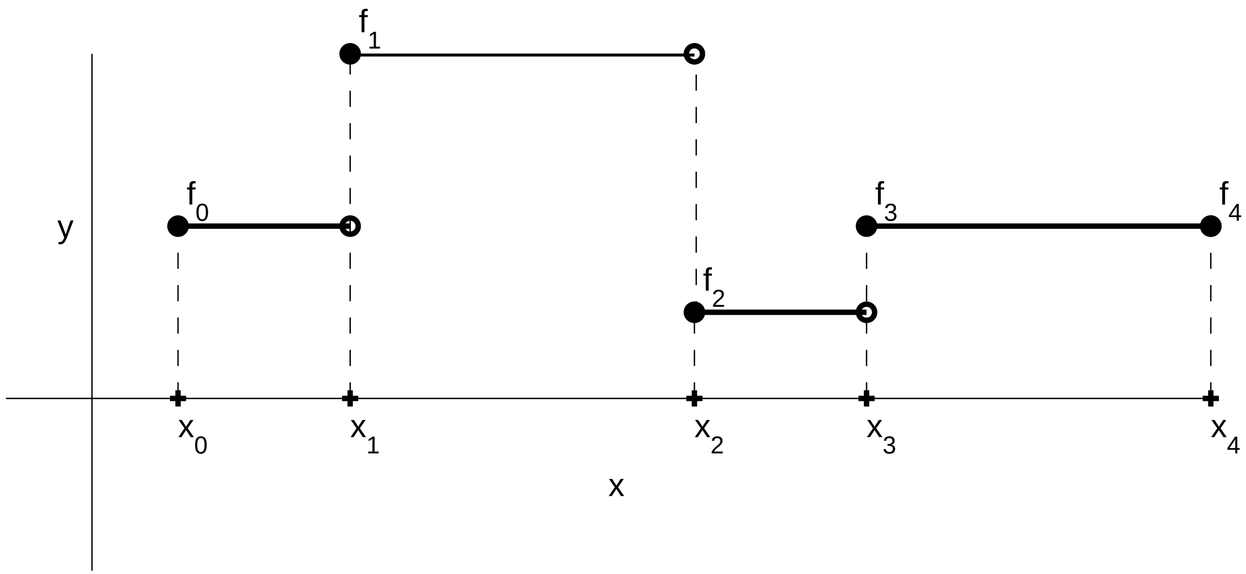
DEFINICE 2

Nechť je dáno dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, t.j. množina $\mathcal{S} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Množinu $\mathcal{F}_{0,\mathcal{S}}$ všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ předpisem

$$c(x) = \begin{cases} c_0, \text{ pro } x \in \langle x_0, x_1) \\ c_i, \text{ pro } x \in \langle x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-2 \\ c_{n-1}, \text{ pro } x \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle \end{cases}$$

kde $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, nazýváme množinou po částech konstatních funkcí na dělení $\mathcal{S}$.

8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí



8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí

DEFINICE 3

Nechť je dáno dělení $\mathcal{S} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Množinu $\mathcal{F}_{1,\mathcal{S}}$ všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ předpisem

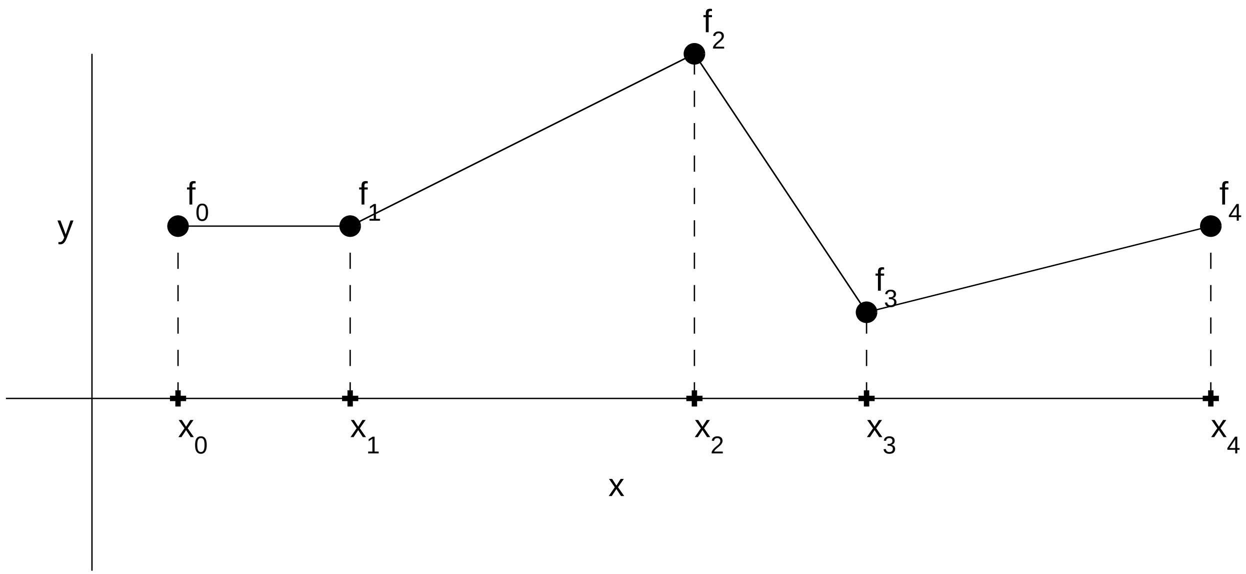
$$l(x) = \begin{cases} l_0 + \frac{l_1 - l_0}{x_1 - x_0} x, \text{ pro } x \in \langle x_0, x_1) \\ l_i + \frac{l_{i+1} - l_i}{x_{i+1} - x_i} x, \text{ pro } x \in \langle x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-2 \\ l_{n-1} + \frac{l_n - l_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} x, \text{ pro } x \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle \end{cases}$$

kde $l_0, \ldots, l_n \in \mathbb{R}$, nazýváme množinou spojitých po částech lineárních funkcí na dělení $\mathcal{S}$.

VĚTA 3

Množiny $\mathcal{F}_{0,\mathcal{S}}$ a $\mathcal{F}_{1,\mathcal{S}}$ tvoří podprostory vektorového prostoru $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí definovaných na $\langle a, b\rangle$.

8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí



8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí

DEFINICE 4

Nechť je dáno dělení $\mathcal{S} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Zobrazení $D : \mathcal{F}_{1,\mathcal{S}} \mapsto \mathcal{F}_{0,\mathcal{S}}$ definované předpisem $D(l) = l', \quad \forall l \in \mathcal{F}_{1,\mathcal{S}}$

$$l'(x) = \begin{cases} \frac{l_1 - l_0}{x_1 - x_0}, \text{ pro } x \in \langle x_0, x_1) \\ \frac{l_{i+1} - l_i}{x_{i+1} - x_i}, \text{ pro } x \in \langle x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-2 \\ \frac{l_n - l_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \text{ pro } x \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle \end{cases}$$

nazýváme derivací spojitých po částech lineárních funkcí na dělení $\mathcal{S}$.

VĚTA 4

Derivace spojitých po částech lineárních funkcí na dělení $\mathcal{S}$ je lineární zobrazení.

8.3 Derivace a integrál po částech lineárních funkcí

DEFINICE 5

Nechť je dáno dělení $\mathcal{S} = \{x_0, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Zobrazení $I : \mathcal{F}_{1,\mathcal{S}} \mapsto \mathbb{R}$ definované $\forall l \in \mathcal{F}_{1,\mathcal{S}}$ předpisem

$$I(l) = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)\big(l(x_0) + l(x_1)\big) + \cdots + \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})\big(l(x_n) + l(x_{n-1})\big)$$

nazýváme určitým integrálem spojitých po částech lineárních funkcí na dělení $\mathcal{S}$ a značíme jej $\int_a^b l(x)dx$.

VĚTA 5

Určitý integrál spojitých po částech lineárních funkcí na dělení $\mathcal{S}$ je lineární forma na $\mathcal{F}_{1,\mathcal{S}}$.

Je-li $l \in \mathcal{F}_{1,\mathcal{S}}, l(x) \geq 0$ nebo $l(x) \leq 0, \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b l(x)dx$ reprezentuje obsah plochy vymezené osou x a grafem funkce l.

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

DEFINICE 6

Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ jsou vektorové prostory a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak *nulový prostor (jádro)* $\mathcal{N}(A)$ zobrazení A je množina vzorů $\mathbf{o}$, t.j.

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

VĚTA 6

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak $\mathcal{N}(A)$ je podprostorem $\mathcal{U}$.

DŮKAZ: Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{N}(A)$, t.j. $A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, $A(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, a je-li α libovolný skalár, pak platí

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \text{ a } A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

DEFINICE 7

Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ jsou vektorové prostory a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak *oborem hodnot* $\mathcal{H}(A)$ zobrazení A je množina všech obrazů, t.j.

$$\mathcal{H}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U}, A(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}.$$

VĚTA 7

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak $\mathcal{H}(A)$ je podprostorem $\mathcal{V}$.

DŮKAZ: Jestliže $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$ a α je skalár, pak

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \text{ a } \alpha\mathbf{u} = \alpha A(\mathbf{x}) = A(\alpha\mathbf{x}).$$

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

VĚTA 8
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory, nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a nechť $A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}$. Potom libovolné řešení $\mathbf{x}$ rovnice

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$, kde $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(A)$.

DŮKAZ: Nechť $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Potom platí

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o},$$

takže vektor $\mathbf{n} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ patří do jádra $\mathcal{N}(A)$ a $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$.

DŮSLEDEK: Lineární zobrazení A je prosté, právě když $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{o}\}$.

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

DEFINICE 8

Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak *hodnost* $h(A)$ *zobrazení* A definujeme jako dimenzi $\mathcal{H}(A)$ a *defekt* $d(A)$ *zobrazení* A definujeme jako dimenzi $\mathcal{N}(A)$.

VĚTA 9

Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Potom

$$h(A) + d(A) = \dim(\mathcal{U}).$$

DŮKAZ: V důkazu se musíme především vypořádat se skutečností, že $\mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{H}(A)$ mohou být podprostory různých prostorů.

Nechť $(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_m)$ je báze $\mathcal{H}(A)$ a nechť $(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ je báze $\mathcal{N}(A)$.

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

DŮKAZ *(Pokračování)*:

Označme si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ libovolné vzory $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m$, takže platí $A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{h}_1, \dots, A(\mathbf{v}_m) = \mathbf{h}_m$. Ukážeme, že vektory $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k)$ tvoří bázi $\mathcal{U}$.

Nechť platí

$$\xi_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \xi_m \mathbf{v}_m + \eta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \eta_k \mathbf{n}_k = \mathbf{o} \tag{1}$$

Pak také

$$A(\xi_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \xi_m \mathbf{v}_m + \eta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \eta_k \mathbf{n}_k) = \mathbf{o},$$

takže s využitím linearity A a definice vektorů $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{n}_i$ dostaneme

$$\xi_1 \mathbf{h}_1 + \cdots + \xi_m \mathbf{h}_m = \mathbf{o}.$$

Jelikož vektory $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m)$ tvoří podle předpokladu bázi $\mathcal{H}(A)$, jsou nezávislé, takže $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_m = 0$. Po dosazení do 1 tedy platí

$$\eta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \eta_k \mathbf{n}_k = \mathbf{o}.$$

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

DŮKAZ *(Pokračování)*:

Poněvadž jsou vektory $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ také nezávislé, plyne odtud $\eta_1 = \cdots = \eta_k = 0$. Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ jsou tedy nezávislé.

Nechť nyní $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je libovolný vektor. Pak $A(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}(A)$ a existuje $\xi_1, \dots, \xi_m$ tak, že platí

$$A(\mathbf{x}) = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \cdots + \xi_m \mathbf{h}_m.$$

Označme si $\mathbf{y} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \xi_m \mathbf{v}_m$, takže $A(y) = A(x)$, a zapišme si $\mathbf{x}$ ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Jelikož $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$, platí $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{N}(A)$ a tedy

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \eta_k \mathbf{n}_k.$$

8.4 Nulový prostor a obor hodnot

DŮKAZ *(Pokračování)*:

Vektor **x** lze potom vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \xi_m \mathbf{v}_m + \eta_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \eta_k \mathbf{n}_k.$$

Vektory $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ tedy tvoří bázi $\mathcal{U}$, takže platí $m + k = \dim(\mathcal{U})$, t.j. $h(A) + d(A) = \dim(\mathcal{U})$. $\square$

DŮSLEDEK: Lineární transformace $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definovaná na vektorovém prostoru konečné dimenze $\mathcal{V}$ je zobrazení na $\mathcal{V}$, právě když A je prosté zobrazení.

8.5 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Mnoho technických problémů lze zformulovat jako úlohu najít pro dané lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a pro $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ tak, aby platilo

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \qquad (R)$$

Například úlohu najít neznámé průhyby lana v úvodní přednášce můžeme zapsat ve tvaru

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2683 \\ 0.2683 \\ 0.2683 \\ 0.2683 \\ 0.2683 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

8.5 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Předpokládejme nyní, že známe například řešení $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ rovnice (R) pro dvě pravé strany $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$, tedy že platí

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1 \text{ a } A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2,$$

a že navíc platí $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.
Pak můžeme určit řešení $\mathbf{x}$ rovnice (R) pouhým sečtením $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, neboť pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ platí

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}.$$

Tomuto jednoduchému důsledku vlastností lineárních zobrazení se říká *princip superpozice*.

8.5 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

VĚTA 10
Nechť $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ na vektorový prostor $\mathcal{V}$. Pak existuje A^{-1}, které je rovněž lineární zobrazení.

DŮKAZ: Inverzní zobrazení A^{-1} existuje pro každé vzájemně jednoznačné zobrazení. Nechť $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$, tedy $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{u})$ a $\mathbf{y} = A^{-1}(\mathbf{v})$, a nechť α je libovolný skalár. Potom

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= A^{-1}\big(A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y})\big) = A^{-1}\big(A(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = \\ &= A^{-1}(\mathbf{u}) + A^{-1}(\mathbf{v}), \\ A^{-1}(\alpha\mathbf{u}) &= A^{-1}\big(\alpha A(\mathbf{x})\big) = A^{-1}\big(A(\alpha\mathbf{x})\big) = \alpha\mathbf{x} = \alpha A^{-1}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 11

Nechť $A : \mathbb{R}^{m,1} \mapsto \mathbb{R}^{n,1}$ je libovolné lineární zobrazení. Pak existuje matice **A** typu (n, m) tak, že pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ platí

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

DŮKAZ: Jelikož libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \cdots + x_m \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}$$

lze $A(\mathbf{x})$ zapsat pomocí

$$A(\mathbf{x}) = A(x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \cdots + x_m \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = x_1 A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) + \cdots + x_m A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde

$$\mathbf{A} = \left[A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}), \ldots, A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}})\right] = [a_{ij}] \, .$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

Lineární zobrazení

$$A : \mathbb{R}^{m,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

se často ztotožňuje s maticí **A** a o matici **A** se mluví jako o lineárním zobrazení.

V tomto smyslu budeme i my používat pojmy *obor hodnot matice* **A**, *nulový prostor matice* **A**, nebo *defekt matice* **A**.

Pojmy, které jsme si doposud zavedli jsou v souladu s touto konvencí. Například obor hodnot $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ každé matice **A** je totožný s jejím sloupcovým prostorem $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, takže pro hodnosti matice a zobrazení platí

$$h(\mathbf{A}) = h(A).$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 5 Určete bázi nulového prostoru matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

ŘEŠENÍ: Budeme řešit soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$. Nejprve upravíme matici $\mathbf{A}$ pomocí řádkových úprav na schodový tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{r}_1 \\ -2\mathrm{r}_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud $h(\mathbf{A}) = 2$ (počet nenulových řádků) a $d(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$.

Bázi $\mathcal{N}(A)$ tedy tvoří jakékoliv dva nezávislé vektory, jejichž složky řeší soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Vypočteme je tak, že za x_2 a x_4 dosadíme postupně například složky $\mathbf{e}_1 = [1, 0], \mathbf{e}_2 = [0, 1]$ a vypočteme $x_1 = -1, x_3 = 0$ a $x_1 = -3, x_3 = 0$.

Bázi nulového prostoru tedy tvoří vektory

$$\mathbf{n}_1 = [-1, 1, 0, 0], \qquad \mathbf{n}_2 = [-3, 0, 0, 1].$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

Jestliže lze matici **A** typu $(m, n), m < n$ rozdělit na bloky tak, že

$$\mathbf{A} = [\ \mathbf{B} \mid \mathbf{C}\ ]$$

a **B** je regulární, lze najít vzorec pro matici **N** typu $(n, n - m)$, jejíž sloupce tvoří bázi $\mathcal{N}(A)$. Budeme hledat **N** ve tvaru:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Po rozepsání levé strany rovnice $\mathbf{A}\mathrm{N} = \mathbf{O}$ s využitím blokové struktury a po vynásobení zleva maticí B^{-1} dostaneme

$$\mathbf{B}^{-1}[\ \mathbf{B} \mid \mathbf{C}\ ] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{O},$$

odkud $\mathbf{X} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{O}$.

Odtud $\mathbf{X} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ a

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

Díváme-li se na matici $\mathbf{A}$ jako na lineární zobrazení $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, můžeme využít dosavadních výsledků o lineárních zobrazeních k alternativnímu výkladu teorie řešitelnosti lineárních soustav:

- Soustava lineárních rovnic má řešení, právě když pravá strana patří do oboru hodnot matice soustavy
- Řešení je jediné, jestliže $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{o}\}$, tedy defekt $d(\mathbf{A}) = 0$, což je ekvivalentní s $h(\mathbf{A}) = n$, kde n je počet neznámých.

VĚTA 12

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) pro kterou platí $d(\mathbf{A}) > 0$, nechť $\mathbf{b}$ je m-rozměrný sloupcový vektor, nechť $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ a nechť $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d)$ je báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Potom libovolné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ může být zapsáno ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1\mathbf{n}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{n}_d$.

8.6 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 6 Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \end{array}$$

ŘEŠENÍ: Rozšířenou matici soustavy nejprve upravíme na schodový tvar

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{r}_1 \\ -2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Z něho dostaneme částečné řešení $\mathbf{x}_0$ řešením soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

tak, že položíme například $x_2 = 0$ a $x_4 = 0$. Dostaneme $x_1 = 2, x_3 = -1$.

Jelikož matice soustavy je stejná jako matice **A** v příkladu 5, můžeme napsat libovolné řešení soustavy pomocí parametrů α_1, α_2:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

Budeme předpokládat, že $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

DEFINICE 9

Nechť $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Pak můžeme vektory $A(\mathbf{e}_1), ..., A(\mathbf{e}_m)$ vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccc} A(\mathbf{e}_1) & = & a_{11}\mathbf{f}_1 & + \cdots + & a_{n1}\mathbf{f}_n \\ \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots \\ A(\mathbf{e}_m) & = & a_{1m}\mathbf{f}_1 & + \cdots + & a_{nm}\mathbf{f}_n \end{array}$$

Matici $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [a_{ij}] = \left[[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \ldots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}}\right]$ nazýváme *maticí lineárního zobrazení* A *vzhledem k bázím* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Jestliže $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, pak budeme mluvit o *matici lineární transformace vzhledem k bázi* $\mathcal{E}$ a místo $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ budeme psát stručně $[A]_{\mathcal{E}}$.

8.6 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 7 Nechť $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2$ mají báze $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ a $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$, kde $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$. Najděte matici derivace

$$D : \mathcal{P}_3 \ni p \mapsto p' \in \mathcal{P}_2.$$

ŘEŠENÍ: Nejdříve najdeme souřadnice $D(e_1), D(e_2)$ a $D(e_3)$ v bázi $\mathcal{F}$. Jelikož $D(e_1)(x) = 0$, $D(e_2)(x) = 1$ a $D(e_3)(x) = 2x$, můžeme napsat přímo:

$$\begin{array}{rcccc} 0 & = & 0 \cdot 1 & + & 0 \cdot x \\ 1 & = & 1 \cdot 1 & + & 0 \cdot x \\ 2x & = & 0 \cdot 1 & + & 2 \cdot x \end{array}$$

Souřadnice $D(e_1), D(e_2)$ a $D(e_3)$ vzhledem k $\mathcal{F}$tvoří zřejmě koeficienty na řádcích, které zapíšeme do sloupců a dostaneme

$$[D]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 13

Nechť $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení, $\mathcal{E}$ je báze $\mathcal{U}$ a $\mathcal{F}$ je báze $\mathcal{V}$. Pak pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ platí

$$[A(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \, [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \, .$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}
[A(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} &= [A(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\
&= [x_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_m A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\
&= x_1 \, [A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} + \cdots + x_m \, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\
&= \Big[\, [A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} \, , \ldots , [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} \, \Big] [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \\
&= [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \, [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 8 S využitím řešení příkladu 7 vypočtěte derivaci libovolného mnohočlenu p nejvýše druhého stupně.

ŘEŠENÍ: Mnohočlen $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_3$ má v bázi $\mathcal{E}$ souřadnice

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}.$$

Jelikož jsme si v příkladu 6 ukázali, že derivace $D : \mathcal{P}_3 \mapsto \mathcal{P}_2$ má v bázích $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ matici

$$[D]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

platí

$$[p']_{\mathcal{F}} = [Dp]_{\mathcal{F}} = [D]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\,[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$p'(x) = b \cdot f_1(x) + 2a \cdot f_2(x) = b + 2ax.$$

8.6 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 14
Nechť $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ a $B : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ jsou lineární transformace. Pak složené zobrazení $AB : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definované předpisem $\big(AB\big)(\mathbf{x}) = A\big(B(\mathbf{x})\big), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární transformace na $\mathcal{U}$ a

$$[AB]_{\mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{E}} \, [B]_{\mathcal{E}} \, .$$

DŮKAZ:

$$(BA)(\alpha\mathbf{u}) = B\big(A(\alpha\mathbf{u})\big) = B\Big(\alpha\big(A(\mathbf{u})\big)\Big) = \alpha\Big(B\big(A(\mathbf{u})\big)\Big) = \alpha\big((BA)(\mathbf{u})\big)$$

$$\begin{aligned}(BA)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= B\big(A(\mathbf{u}+\mathbf{v})\big) = B\big(A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})\big) = B\big(A(\mathbf{u})\big) + B\big(A(\mathbf{v})\big) = \\ &= (BA)(\mathbf{u}) + (BA)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[AB]_{\mathcal{E}} &= \big[[(AB)(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \ldots, [(AB)(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}\big] = \Big[\big[A\big(B(\mathbf{e}_1)\big)\big]_{\mathcal{E}}, \ldots, \big[A\big(B(\mathbf{e}_n)\big)\big]_{\mathcal{E}}\Big] = \\ &= \big[[A]_{\mathcal{E}}\,[B(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \ldots, [A]_{\mathcal{E}}\,[B(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}\big] = [A]_{\mathcal{E}}\,\big[[B(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \ldots, [B(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}\big] = \\ &= [A]_{\mathcal{E}}\,\big[[B]_{\mathcal{E}}\,[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{E}}, \ldots, [B]_{\mathcal{E}}\,[\mathbf{e}_n]_{\mathcal{E}}\big] = [A]_{\mathcal{E}}\,[B]_{\mathcal{E}}\,\big[\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}\big] = \\ &= [A]_{\mathcal{E}}\,[B]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{I} = [A]_{\mathcal{E}}\,[B]_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned}$$

8.7 Změna báze

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze $\mathcal{U}$. Nechť $C : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je lineární zobrazení takové, že $C(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$. Zobrazení C tedy zobrazuje bázi $\mathcal{E}$ na bázi $\mathcal{F}$, takže podle důsledků vět 8 a 9 je vzájemně jednoznačné a existuje C^{-1}.

Nechť $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je libovolný vektor a $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [x_1, \ldots, x_n]$. Pak z

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

plyne

$$C(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{f}_1 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n,$$

takže

$$[C(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}\,.$$

Odtud dostaneme

$$[C]_{\mathcal{F}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}\,.$$

Označíme-li $\mathbf{T} = [C]_{\mathcal{F}}^{-1} = [C^{-1}]_{\mathcal{F}} = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}}\,, \ldots, [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}}]$ dostaneme

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{T}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}\,.$$

8.7 Změna báze

DEFINICE 10

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathcal{U}$. Matice

$$\mathbf{T} = \left[[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}}, \ldots, [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}} \right]$$

se nazývá *matice zpětného přechodu* od nové báze $\mathcal{F}$ k bázi $\mathcal{E}$.

Uvažujme *matici přechodu* $\mathbf{S} = [C]_{\mathcal{E}}$ od původní báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{F}$.

Mezi maticí zpětného přechodu $\mathbf{T}$ a maticí přechodu $\mathbf{S}$ platí vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{TS} &= \mathbf{T}\Big[[C(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \ldots, [C(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}} \Big] = \Big[\mathbf{T}\,[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}}, \ldots, \mathbf{T}\,[\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \Big] = \\ &= \Big[[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}}, \ldots, [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{F}} \Big] = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

takže $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Pro tuto matici platí vztah $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{S}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}$.

8.7 Změna báze

VĚTA 14

Nechť A je lineární transformace $\mathcal{U}$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ jsou báze $\mathcal{U}$ a nechť $\mathbf{T}$ je matice zpětného přechodu od nové báze $\mathcal{F}$ k bázi $\mathcal{E}$. Pak platí

$$[A]_{\mathcal{F}} = \mathbf{T}\,[A]_{\mathcal{E}}\mathbf{T}^{-1}.$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}
[A]_{\mathcal{F}} &= \Big[[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{F}}, \ldots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{F}}\Big] = \Big[\mathbf{T}\,[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{E}}, \ldots, \mathbf{T}\,[A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{E}}\Big] = \\
&= \mathbf{T}\Big[[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{E}}, \ldots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{E}}\Big] = \mathbf{T}\Big[[A]_{\mathcal{E}}\,[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}}, \ldots, [A]_{\mathcal{E}}\,[\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}}\Big] = \\
&= \mathbf{T}\,[A]_{\mathcal{E}}\Big[\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}}, \ldots, \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{f}_n]_{\mathcal{F}}\Big] = \mathbf{T}\,[A]_{\mathcal{E}}\mathbf{T}^{-1}\Big[\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}\Big] = \\
&= \mathbf{T}\,[A]_{\mathcal{E}}\mathbf{T}^{-1}.
\end{aligned}$$

8.8 Podobnost matic

DEFINICE 11

Čtvercové matice **A** a **B** stejného řádu jsou *podobné*, jestliže existuje regulární matice **T** tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}.$$

VĚTA 15

Matice dané lineární transformace v různých bázích jsou podobné.

Dá se dokázat i tvrzení, že jsou-li matice podobné, pak jsou maticemi nějaké lineární transformace v různých bázích. Jelikož podstatné charakteristiky lineárních transformací (například hodnost nebo defekt) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že podobné matice budou mít podstatné charakteristiky shodné.