9. Bilineární formy

Bilineární formy

1. Definice a příklady
2. Klasifikace bilineárních forem
3. Matice bilineární formy
4. Změna báze
5. Kongruentní matice

9.1 Definice a příklady

DEFINICE 1

Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor. Zobrazení $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ se nazývá *bilineární forma*, jestliže pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1. $B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
2. $B(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
3. $B(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
4. $B(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Bilineární funkce je tedy při zvolené hodnotě jedné proměnné lineární funkcí druhé proměnné. Můžeme ji považovat za zobecnění funkce $z = axy$ dvou proměnných x a y na vektorové prostory.

8.1 Definice a příklady

PŘÍKLAD 1 Na prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 si definujeme formu B předpisem, který každé dvojici vektorů $\mathbf{x} = [x_i]$ a $\mathbf{y} = [y_i]$ přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Interpretujeme-li **x** jako sílu a **y** jako dráhu, pak $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je práce konaná silou **x** po dráze **y**. Snadno se ověří, že B je bilineární forma.

PŘÍKLAD 2 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každé dvojici sloupcových vektorů druhého řádu $\mathbf{x} = [x_i]$ a $\mathbf{y} = [y_i]$ přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2,$$

je bilineární forma.

PŘÍKLAD 3 Nechť $\mathcal{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé dvojici funkcí $f \in \mathcal{F}$ a $g \in \mathcal{F}$ přiřazuje

$$B(f, g) = f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

definuje bilineární formu.

9.2 Klasifikace bilineárních forem

DEFINICE 2
Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor. Bilineární forma B se nazývá *symetrická*, jestliže pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ a *antisymetrická*, jestliže $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Antisymetrické formy lze ekvivalentně charakterizovat též rovností $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ pro libovolné $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Skutečně, platí-li $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, pak

$$B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0,$$

odkud dostaneme $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Obráceně z $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ plyne

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

tedy platí $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.

9.2 Klasifikace bilineárních forem

PŘÍKLAD 4 Bilineární formy z příkladu 1 a 3 jsou zřejmě symetrické, zatímco forma z příkladu 2 je symetrická, právě když $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Bilineární forma z příkladu 2 bude antisymetrická, právě když $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$

Vskutku $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}\right)^\top = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$.
Jelikož $B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}$ pak $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.
Obdobně $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.
Například pro matici

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilineární forma je antisymetrická, neboť splňuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -(y_1 x_2 - y_2 x_1) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

9.2 Klasifikace bilineárních forem

VĚTA 1

Každou bilineární formu B můžeme vyjádřit ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické formy

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

kde

$$B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big)$$

$$B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big)$$

přičemž $B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ a $B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v},\mathbf{u})$.

Formy B^{S} a B^{A} se nazývají po řadě *symetrická část* a *antisymetrická část* bilineární formy B.

DŮKAZ: $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big) + \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big)$

9.3 Matice bilineární formy

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor s bází $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a nechť B je bilineární forma na $\mathcal{V}$. Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ jsou dva vektory, které lze zapsat pomocí souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Pak

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = x_1 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) + \cdots + x_n B(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)y_1 + \cdots + B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n)y_n \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1)y_1 + \cdots + B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \ldots B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \ldots B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

9.3 Matice bilineární formy

DEFINICE 3
Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor a $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ je jeho báze. Maticí bilineární formy B v bázi $\mathcal{E}$ rozumíme matici

$$[B]_{\mathcal{E}} = [B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]$$

VĚTA 2
Nechť $[B]_{\mathcal{E}}$ je matice bilineární formy B v bázi $\mathcal{E}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Pro libovolné vektory $x, y \in \mathcal{V}$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} .$$

9.3 Matice bilineární formy

PŘÍKLAD 5 Najděte matici bilineární formy z příkladu 3 definované na prostoru P_3 všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně v bázi $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$. Výsledek využijte k vyčíslení $B(p, q)$ pro $p(x) = 1 - x$ a $q(x) = x^2 - x$.

ŘEŠENÍ: Postupně vypočteme:

$$
\begin{aligned}
B(e_1, e_1) &= e_1(1)e_1(1) + e_1(2)e_1(2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 &= 2 \\
B(e_1, e_2) &= e_1(1)e_2(1) + e_1(2)e_2(2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 &= 3 \\
B(e_1, e_3) &= e_1(1)e_3(1) + e_1(2)e_3(2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 &= 5 \\
B(e_2, e_2) &= e_2(1)e_2(1) + e_2(2)e_2(2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 &= 5 \\
B(e_2, e_3) &= e_2(1)e_3(1) + e_2(2)e_3(2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 &= 9 \\
B(e_3, e_3) &= e_3(1)e_3(1) + e_3(2)e_3(2) &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 &= 17
\end{aligned}
$$

Ostatní prvky matice formy dopočteme ze symetrie

$$B(e_i, e_j) = e_i(1)e_j(1) + e_i(2)e_j(2) = e_j(1)e_i(1) + e_j(2)e_i(2) = B(e_j, e_i).$$

9.3 Matice bilineární formy

PŘÍKLAD 5 *(Pokračování)*

Matice má tedy tvar:

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}.$$

Jelikož

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ a } [q]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

platí

$$B(p,q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = -2.$$

9.3 Matice bilineární formy

VĚTA 3
Nechť B je bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ konečné dimenze. Pak B je symetrická, právě když matice B v libovolné bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathcal{V}$ splňuje

$$[B]_{\mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{E}}^{\top} \qquad (S)$$

DŮKAZ: Je-li B symetrická bilineární forma, pak $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ a vztah (S) platí.

Obráceně, nechť platí (S). Pak podle věty 2 pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ platí

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} = \left([\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}}\right)^{\top} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}}^{\top} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} =$$

$$= B(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

takže forma B je symetrická.

Matice $\mathbf{A}$, která splňuje $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$, se nazývá *symetrická matice*.

9.4 Změna báze

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze $\mathcal{U}$. Nechť $\mathbf{S}$ je matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k nové bázi $\mathcal{F}$, takže pro libovolný vektor $x \in \mathcal{U}$ platí

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{S}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}\,.$$

S použitím věty 2 dostaneme pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ a bilineární formu B na $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^{\top}\,[B]_{\mathcal{F}}\,[\mathbf{y}]_{\mathcal{F}} = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top}\,[B]_{\mathcal{E}}\,[\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^{\top}\,\mathbf{S}^{\top}[B]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{S}\,[\mathbf{y}]_{\mathcal{F}}\,.$$

Zvolíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i$ a $\mathbf{y} = \mathbf{f}_j$ dostaneme

$$[B]_{\mathcal{F}} = \mathbf{S}^{\top}[B]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{S}.$$

Odtud dostaneme s použitím matice zpětného přechodu $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ od báze $\mathcal{F}$ k bázi $\mathcal{E}$

$$[B]_{\mathcal{E}} = \mathbf{T}^{\top}[B]_{\mathcal{F}}\,\mathbf{T}.$$

9.5 Kongruentní matice

DEFINICE 4

Čtvercová matice **A** je *kongruentní* s maticí **B**, jestliže existuje regulární matice **T** tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}.$$

VĚTA 4

Matice dané bilineární formy v různých bázích jsou kongruentní.

Je možno dokázat i tvrzení, že jsou-li matice kongruentní, pak jsou maticemi nějaké bilineární formy v různých bázích. Jelikož podstatné vlastnosti bilineárních forem (například symetrie) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že kongruentní matice budou mít podstatné charakteristiky shodné.