Cvičení č. 13

Determinant a vlastnosti determinantů. Výpočet determinantu. Adjungovaná a inverzní matice. Cramerovo pravidlo.

Determinant

Definice:
Nechť A je reálná čtvercová matice řádu n. Čtvercovou matici M_{ij}, která vznikla z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce nazýváme minorem matice A příslušnému k prvku a_{ij}.

Příklad:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definice:
Determinantem reálné čtvercové matice $A = [a_{ij}]$ řádu n, nazýváme realné číslo, které značíme det A nebo $|A|$, a pro které platí

1. $|A| = a_{11}$ je-li $n = 1$,
2. $|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n}|M_{1n}|$ pro $n > 1$.

Příklad:
Vypočtěte determinant matice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(5 \cdot |9| - 6 \cdot |8|\right) - 2 \cdot \left(4 \cdot |9| - 6 \cdot |7|\right) + 3 \cdot \left(4 \cdot |8| - 5 \cdot |7|\right) =$$
$$= 1 \cdot \left(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8\right) - 2 \cdot \left(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7\right) + 3 \cdot \left(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7\right) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$
♦

Příklad:
Vypočtěte determinant matice
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Řešení:
$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - b \cdot |c| = ad - bc.$$ ♦

Poznámka:
Determinant dolní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

Nechť je dána dolní trojúhelníková matice

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Pak dle definice determinantu je

$$\det L = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11} \begin{vmatrix} l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{32} & l_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix} - 0 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 0 =$$

$$= l_{11} l_{22} \begin{vmatrix} l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{43} & l_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n3} & l_{n4} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix} - 0 + \ldots + (-1)^{n-2} \cdot 0 = \ldots = l_{11} l_{22} \cdots |l_{nn}| = l_{11} l_{22} \cdots l_{nn}.$$

Poznámka:
Algebraickým doplňkem prvku (i,j) čtvercové matice A nazýváme číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, kde M_{ij} je minor matice A příslušný prvku i,j. Pak se dá druhý bod definice determinantu přepsat do tvaru $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}$.

<u>Vlastnosti determinantu</u>:

Věta:
Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného řádu.
1. Jestliže matice B vznikla z matice A vzájemnou výměnou dvou řádků pak det $A = -$ det B
2. Jestliže matice B vznikla z matice A vynásobením jednoho řádku číslem α pak αdet A=det B
3. Jestliže matice B vznikla z matice A přičtením násobku jednoho řádku k druhému pak det A=det B

Důsledek:
1. Jestliže má čtvercová matice A jeden řádek nulový pak det A=0
2. Jestliže má čtvercová matice A lineárně závislé řádky pak det A=0
3. Jestliže je čtvercová matice A singulární pak det A=0

Věta (Rozvoj determinantu podle řádku):
Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak $|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$ pro libovolné i=1,...,n.

Poznámka:
Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

Nechť je dána horní trojúhelníková matice

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Pak dle rozvoje determinantu podle posledního řádku je

$$\det U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = 0 + \ldots + 0 + u_{nn} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + .. + 0 + u_{nn} u_{n-1,n-1} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-3,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = \ldots = |u_{11}| \cdots u_{n-1,n-1} u_{nn} = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn} .$$

Věta:
Nechť A je libovolná čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

Důsledek:
Všechny všechny výše uvedené vlastnosti determinantu platí i pro sloupce.

<u>Výpočet determinantu</u>

Z výše uvedených vlastností tedy vyplývá, že je možné pomocí elementárních řádkových úprav podobně jako v případě Gaussovy eliminace upravit libovolnou matici na horní trojúhelníkovou. Přitom musíme ovšem mít na paměti následující pravidla:

1. Vynásobíme-li libovolný řádek matice nenulovým číslem, vynásobí se tímto číslem i determinant této matice a proto musíme determinant takto upravené matice vydělit tímto číslem.
2. Vyměníme-li dva libovolné řádky matice, změní se znaménko determinantu matice
3. Přičteme-li násobek jednoho řádku matice k jinému, determinant se nemění.

Navíc všechny tyto úpravy můžeme použít pokud je to výhodné i pro úpravu sloupců.

Pokud takto upravíme matici na horní případně i dolní trojúhelníkový tvar, je výsledný detrminant roven součinu prvků na diagonále.

Příklad:
Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -4\check{r}_1 \\ -7\check{r}_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \cdot\frac{1}{6} \end{matrix} = (-3)\cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\check{r}_2 \end{matrix} =$$

$$= -18 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

♦

Adjungovaná a inverzní matice

Definice:
Matice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} ve čtvercové matici *A* nazýváme adjungovanou maticí k matici *A*.

Příklad:
Nalezněte adjungovanou matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-2) = -2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1-2) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1-0) = -1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2-2) = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-2) = -1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1-2) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4-0) = 4, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2+2) = -4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+2) = 2.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ ♦

Věta:
Nechť *A* je čtvercová matice řádu *n* a nechť $\det A \neq 0$. Pak je matice *A* regulární a platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Příklad:
Nalezněte inverzní matici k matici

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ +\check{r}_1\\ -\check{r}_1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdot 2\end{matrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +\check{r}_2\end{matrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 2=2$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3/2 & -1/2 & -2\\ -1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}.$$

♦

Poznámka:
Je třeba si povšimnout, že sestavení adjungované matice je výpočetně velmi náročný proces a například pro matici řádu 4 je zapotřebí vypočítat 16 determinantů řádu 3. Z tohoto důvodu je mnohem výhodnější pro výpočet determinantů matice používat Gauss-Jordanovu eliminační metodu. Použití adjungované matice pro výpočet inverzní matice má tedy snad význam pouze pro výpočet inverzní matice k matici, jejíž prvky jsou zadány parametricky a to jen pro velmi malé řády.

<u>Cramerovo pravidlo</u>

Definice:
Nechť je dána soustava *n* lineárních rovnic o *n* neznámých $Ax=b$. Je-li matice *A* regulární pak soustava má jediné řešení a pro jeho složky platí

$$x_i=\frac{\det A_i^b}{\det A},$$

kde matice A_i^b vznikla z matice *A* záměnou *i*-tého sloupce za vektor pravých stran *b*.

Příklad:
Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1\\ -x_1 & & & + & 2x_3 & = & -1\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\end{array}$$

Řešení:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ a proto je matice soustavy regulární.

$$x_1 = \frac{\det A_1^b}{\det A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +\check{r}_1 \\ \\ \end{matrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Rozvoj} \\ \text{podle} \\ \text{1. sloupce}}}{=} \frac{1}{2}\left(1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0\right) = \frac{1}{2}(2-4) = -1,$$

$$x_2 = \frac{\det A_2^b}{\det A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +\check{r}_1 \\ -\check{r}_1 \end{matrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \check{r}_3 \\ \check{r}_2 \end{matrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)\cdot 4 = 2,$$

$$x_3 = \frac{\det A_3^b}{\det A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +\check{r}_1 \\ \\ \end{matrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Rozvoj} \\ \text{podle} \\ \text{1. sloupce}}}{=} -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-0) = -1.$$

Řešením soustavy je tedy $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -1$ což se dá snadno ověřit dosazením do zadané soustavy.

♦

Poznámka:
Z příkladu je patrné, že řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla je výpočetně mnohem více náročné než řešení pomocí Gaussovy eliminace. Např. pokud počítáme determinant matice, musíme ji upravit na trojúhelníkový tvar. A již toto odpovídá svou náročností upravě na schodový tvar v Gaussově eliminaci. Tuto úpravu pak při užití Cramerova pravidla musíme ještě opakovat pro všechny složky řešení!!!!