Cvičení 2.

pojem matice, operace s maticemi, algebra matic.

Matice

Definice: Matice je soubor $m\times n$ reálných resp. komplexních čísel sestavených do m řádků a n sloupců. Matici zapisujeme následujícím způsobem

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: O matici A říkáme, že má rozměr $m\times n$, a prvky $a_{ij}, \forall i = 1,\dots,m, \forall j = 1,\dots,n$.
V případě, že $m = n$, pak matici nazýváme čtvercovou řádu n.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}$$

je matice 2×3, s prvky $a_{11} = 1, a_{12} = -2.3, a_{13} = \sqrt{3}, a_{31} = \frac{7}{15}, a_{32} = 0, a_{33} = \lg(4)$

$$B = \begin{pmatrix} & 3^2 & \frac{1}{2} \\ & & 0 \\ -1.36 & \sin(3) & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

maticí není !!!!

Příklad:

$$D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ tj. } d_{ij} = 0, \text{pro } i \neq j$$

Tuto matici nazýváme diagonální matice.
Matice

$$I = (e_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ tj. } e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{pro } i = j \\ 0, \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

je speciální případ diagonální a nazýváme ji jednotková.

Matici

$$O = (o_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. } o_{ij} = 0, \forall i, j$$

nazýváme nulovou maticí.

Definice: Říkáme, že dvě matice jsou si rovny jestliže mají stejný počet řádků a sloupců a prvky na odpovídajících pozicích jsou si rovny.

Operace s maticemi

Definice: Nechť je dána matice $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$. Pak matici $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ pro jejíž prvky platí, že $b_{ij}=a_{ji}, i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m$ nazýváme maticí transponovanou k matici A a značíme ji A^T.

Příklad:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{15} \\ -2.3 & 0 \\ \sqrt{3} & \lg(4) \end{pmatrix}, \left(A^T\right)^T=\begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}$$

Věta: Pro libovolnou matici platí, že $A=\left(A^T\right)^T$

Dk: triviální ♦

Příklad:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Matici, pro kterou platí, že $A=A^T$ nazýváme maticí symetrickou.

Příklad:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Matici pro kterou platí, že $A=-A^T$ nazýváme matici antisymetrickou.

Definice: Nechť je dána matice $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ a číslo k reálné rep. komplexní. Pak matici $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ pro jejíž prvky platí, že $b_{ij}=ka_{ij}, i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ nazýváme součin čísla k a matice A a značíme ji kA.

Příklad:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}, -3A=\begin{pmatrix} -3 & 6.9 & -3\sqrt{3} \\ -\frac{7}{5} & 0 & -\lg(64) \end{pmatrix}$$

Poznámka: $-A=(-1)A$

Definice: Nechť jsou dány matice $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ a $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$. Pak matici $C=(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ pro jejíž prvky platí, že $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$ nazýváme součet matice A a matice B a značíme ji $A+B$.

Příklad:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ -8 & 1 & -2\end{pmatrix}, A+B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ -6 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

Definice: Nechť jsou dány matice $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,q}}$ a nechť $n=p$. Pak matici $C=(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,q}}$ pro jejíž prvky platí, že

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$$

nazýváme součin matice A a matice B a značíme ji AB.

Příklad:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{pmatrix}$$

Pozor!!! *BA* nelze násobit

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot2 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-3) & 1\cdot0+(-2)\cdot2\\ 0\cdot1+3\cdot2 & 0\cdot(-1)+3\cdot(-3) & 0\cdot0+3\cdot2\\ 2\cdot1+5\cdot2 & 2\cdot(-1)+5\cdot(-3) & 2\cdot0+5\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -4\\ 6 & -9 & 6\\ 12 & -17 & 10\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot2 & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot3+0\cdot5\\ 2\cdot1+(-3)\cdot0+2\cdot2 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot3+2\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, CD=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -6 & -2\end{pmatrix}, DC=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Poznámka: Z předchozího příkladu je vidět, že obecně neplatí vztah *AB*=*BA*. Matice, pro které toto platí nazýváme záměnné.

<u>Vlastnosti maticových operací</u>

Věta: Nechť jsou dány libovolné matice *A*, *B*, *C* a libovolná reálná resp. komplexní čísla *k*, *h*. Pokud níže uvedené maticové operace mají smysl pak platí

1. $0A = O$
2. $1A = A$
3. $(k+h)A = kA+hA$

4. $k(A+B) = kA+kB$
5. $(kh)A = k(hA)$
6. $(kA)^T = kA^T$
7. $A+B = B+A$
8. $A+(B+C) = (A+B)+C$
9. $A+O = O+A = A$
10. $A+(-A) = (-A)+A = O$
11. $(A+B)^T = A^T + B^T$
12. $AI = A, IB = B$
13. $AO = O, OB = O$
14. $A(BC) = (AB)C$
15. $A(B+C) = AB+AC$
16. $(A+B)C = AC+BC$
17. $(AB)^T = B^T A^T$

Dk:

14. $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$

$$G = BC = (g_{ij}), g_{ij} = \sum_k b_{ik}c_{kj}, H = AB = (h_{ij}), h_{ij} = \sum_l a_{il}b_{lj}$$

$$P = AG = A(BC) = (p_{ij}), p_{ij} = \sum_l a_{il}g_{lj} = \sum_l a_{il}\sum_k b_{lk}c_{kj} = \sum_l\sum_k a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

$$Q = HC = (AB)C = (q_{ij}), q_{ij} = \sum_k h_{ik}c_{kj} = \sum_k\left(\sum_l a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_k\sum_l a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

tedy $P = Q$.

17. $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=A^T, c_{ij} = a_{ji}, D = B^T, d_{ij} = b_{ji}$

$$G = AB = (g_{ij}), g_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}, H = G^T = (AB)^T = (h_{ij}), h_{ij} = g_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki}$$

$$P = DC = B^T A^T = (p_{ij}), p_{ij} = \sum_k d_{ik}c_{kj} = \sum_k b_{ki}a_{jk}$$

tedy $H = P$. ♦