Cvičení č. 4

Gaussova-Jordanova eliminační metoda, výpočet inverzní matice, elementární řádkové úpravy a násobení matic

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Cílem Gaussovy-Jordanovy eliminační metody je převést rozšířenou matici soustavy na matici, kde na místě původní matice soustavy bude jednotková matice a na místě pravých stran se pak vyskytne řešení soustavy.

$(A,b)\xrightarrow{\text{E.R.Ú}}(I,x)$

Příklad:

$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+2x_3&=10\\x_1+3x_2-x_3&=2\\2x_1+2x_2+3x_3&=15\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\1&3&-1&2\\2&2&3&15\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 3\\ \cdot 3\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\3&9&-3&6\\6&6&9&45\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -r_1\\ -2r_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\0&11&-5&-4\\0&10&5&25\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot\frac{1}{5}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\0&11&-5&-4\\0&2&1&5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot 11\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\0&11&-5&-4\\0&22&11&55\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -2r_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\0&11&-5&-4\\0&0&21&63\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot\frac{1}{21}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&10\\0&11&-5&-4\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}-2r_3\\ +5r_3\\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&0&4\\0&11&0&11\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot\frac{1}{11}\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}+2r_2\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&0&6\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot\frac{1}{3}\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

Řešením je tedy vektor $x=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. Kontrola viz Cvičení č. 3, 1. příklad.

Inverzní matice

Definice: Je-li dána čtvercová matice A a jestliže existuje čtvercová matice B stejného řádu taková, že $AB = BA = I$, pak se matice B nazývá inverzní matice k matici A a značí se A^{-1}. Matice, ke kterým existuje inverzní matice nazýváme regulární v opačném případě je nazýváme singulární.

Jelikož $x = A^{-1}b$ a $A^{-1}A = I$ můžeme schema Gaussovy-Jordanovy metody přepsat následovně:

$$(A,b)\xrightarrow{\text{E.R.Ú}}(A^{-1}A,A^{-1}b)\,.$$

Použijeme-li tedy místo b jednotkovou matici, můžeme Gaussovou-Jordanovou metodou nalézt matici inverzní k matici A.

$$(A,I)\xrightarrow{\text{E.R.Ú}}(A^{-1}A,A^{-1}I)=(I,A^{-1})$$

Příklad:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}, A^{-1}=?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \cdot 2\\ \cdot 2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\2&-2&0&0&2&0\\-2&4&2&0&0&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ -r_1\\ +r_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&-4&-3&-1&2&0\\0&6&5&1&0&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \cdot 2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&-4&-3&-1&2&0\\0&12&10&2&0&4\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ +3r_2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&-4&-3&-1&2&0\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\begin{matrix}-3r_3\\ +3r_3\\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&0&4&-18&-12\\0&-4&0&-4&20&12\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\begin{matrix}\cdot\frac{1}{2}\\ \cdot(-\frac{1}{4})\\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&-9&-6\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\begin{matrix}-r_2\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix} \text{ a zkouška } A^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

<u>Elementární řádkové úpravy a násobení matic</u>

Uvažujme matici

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

1. Matice výměny řádků

$$T_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, T_{1,2}A=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$$

Násobením maticí zleva tedy vyměníme řádky v matici A. Obecně pro matice řádu n má matice, která způsobí výměnu i-tého a j-tého řádku tvar:

$$T_{i,j}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

2. Matice násobení řádku číslem

$$T_1^{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&1\end{pmatrix}, T_1^{\alpha}A=\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\c&d\end{pmatrix}$$

Násobením matic zleva tedy vynásobíme 1. řádek v matici A. Obecně pro matice řádu n má matice, která způsobí vynásobení i-tého řádku tvar:

$$T_i^\alpha = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

2. Matice přičtení násobku jednoho řádku k jinému

$$T_{1,2}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, T_{1,2}^\alpha A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a + c & \alpha b + d \end{pmatrix}$$

Násobením matic zleva tedy přičteme násobek 1. řádku k 2. řádku v matici A. Obecně pro matice řádu n má matice, která způsobí přičtení násobku i-tého řádku k j-tému řádku tvar:

$$T_{i,j}^\alpha = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Poznámka: Je tedy vidět, že matici reprezentující řádkovou elementární úpravu získáme z jednotkové matice aplikováním odpovídající řádkové úpravy na tuto jednotkovou matici.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = U$$

Odpovídající matice elementárních řádkových úprav mají postupně tvary:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tzn., že jsme prováděli následující násobení matic:

$A_1 = T_1 A,\ A_2 = T_2 A_1,\ A_3 = T_3 A_2,\ A_4 = T_4 A_3,\ U = T_5 A_4$

Postupným dosazením dostaneme vztah:

$U = (T_5(T_4(T_3(T_2(T_1 A))))) = (T_5 T_4 T_3 T_2 T_1) A = TA$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matice T tedy transformuje matici A na matici U.

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = U$$

Poznámka: Budeme-li stejnými maticemi násobit zprava budeme provádět tytéž operace, ale na sloupcích matice.