Vektorové prostory a podprostory

1. Nechť $\mathscr{F}$ je množina všech reálných funkcí (tj. zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Pro $f, g \in \mathscr{F}$ definujme součet $f + g \in \mathscr{F}$ takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Pro $f \in \mathscr{F}$, $r \in \mathbb{R}$ definujme součin $r \cdot f \in \mathscr{F}$ takto: $(r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x))$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\mathscr{F}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

2. Nechť $\mathscr{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí definovaný v příkladu 1. Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory $\mathscr{F}$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

   (a) $W_1 = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = 1\}$,
   $W_2 = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = 0\}$

   (b) $W_1 = \{f \in \mathscr{F} : 2f(x) - f(0) = 0\}$,
   $W_2 = \{f \in \mathscr{F} : 2f(x) - f(0) = 3\}$

   (c) $W_1 = \{f \in \mathscr{F} : f(1) = 0 \ \wedge f(-1) = 0\}$,
   $W_2 = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = -1 \ \wedge f(1) = 0\}$

   (d) $W = \{f \in \mathscr{F} : 2f(x) - f(-x) = 0\}$

   (e) $W = P_n$, kde P_n značí množinu všech polynomů stupně nejvýše n.

3. Nechť je dán vektorový prostor P_2 (prostor všech polynomů stupně maximálně 2). Rozhodněte, zda je množina $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c : \ a + c = 0 \ \wedge \ a - b = 0\}$ podprostorem P_2. Své rozhodnutí zdůvodněte.

4. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subset P_n$ je podprostorem vektorového prostoru polynomů P_n, je-li
   a) $W_1 = \{p \in P_n : p(x) = p(-x)\}$,
   b) $W_2 = \{p \in P_n : 2p(0) + 3p(1) = 0\}$,
   c) $W_3 = \{p \in P_n : p(x) = x^2 + ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$,
   d) $W_4 = \{p \in P_n : p(x) = ax^2 + bx + c, \ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

5. Rozhodněte, zda je podmnožina $W \subset \mathbb{R}^n$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, je-li $W = \{(x_1, \cdots x_n) : \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}\}$.

6. Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$:
$$U = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0\},$$
$$V = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_3 + u_4 = 0\}.$$
   Určete $U \cap V$.

7. Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$:
$$U = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0 \wedge -u_1 - u_3 = 0\},$$
$$V = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_2 - 2u_3 + u_4 = 0\}.$$
   Určete $U \cap V$.

8. Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U =& \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : \ u_1 + u_2 - u_3 = 0 \ \wedge \ u_1 - 2u_2 = 0\}, \\ V =& \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : \ u_1 - u_2 - u_3 = 0\}. \end{aligned}$$

   Určete $U + V$.

9. Udejte příklad vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$, který má konečně mnoho vektorů.

10. Udejte příklad nekonečné podmnožiny M v $\mathbb{R}^5$ tak, že M není podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$.

Výsledky

1. $\mathscr{F}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. (a) W_1 není, W_2 je podprostor,
   (b) W_1 je, W_2 není podprostor,
   (c) W_1 je, W_2 není podprostor,
   (d) W je podprostor,
   (e) W je podprostor.
3. W je podprostor,
4. (a) W je podprostor,
   (b) W je podprostor,
   (c) W není podprostor,
   (d) W není podprostor.
5. W není podprostor.
6. $U \cap V = \langle [-1, 1, 0, 0], [2, 0, -1, 1] \rangle$
7. $U \cap V = \langle [-1, 2, 1, 0], [0, -1, 0, 1] \rangle$
8. $U + V = \langle [2, 1, 3], [1, 1, 0], [1, 0, 1] \rangle$