Kapitola:	**5 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC**

Problematika řešení soustav lineárních rovnic patří mezi klasická témata lineární algebry. Teorie soustav lineárních rovnic a metody jejich řešení se opírají o teorii vektorových prostorů, matic a determinantů, která byla v nejnutnější míře probrána v předchozích kapitolách. Na druhé straně můžete očekávat, že znalosti o soustavách lineárních rovnic a metodách jejich řešení uplatníte v řadě jiných oborů a disciplín, nejen čistě matematického zaměření.

Modul:	**5.1 Základní pojmy**

Cílem tohoto modulu je

- definovat pojem soustavy lineárních rovnic,
- seznámit se s terminologií teorie soustav lineárních rovnic a potřebným označením.

Učební jednotka:	**5.1.1 Základní pojmy**

Příklad 26.

Soustava rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

je příkladem soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

je matice soustavy, matice

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

je rozšířená matice soustavy, vektor $\mathbf{b} = (4, -1, 7)$ je vektor řešení a vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ je vektor řešení soustavy. Dosazením do soustavy si můžete ověřit, že platí $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -3$.

Modul:	**5.2 Řešitelnost soustavy lineárních rovnic**

Cílem tohoto modulu je

- seznámit se s podmínkami řešitelnosti soustavy lineárních rovnic,
- rozšířit znalosti terminologie soustav lineárních rovnic.

Učební jednotka:	**5.2.1 Řešitelnost soustavy lineárních rovnic**

Příklad 2.

Soustava lineárních rovnic

$$4x_1 - 5x_2 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

má řešení, neboť hodnost matice soustavy $\mathbf{A}$ je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy $\mathbf{R}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix}, \text{ tj. } h(\mathbf{A}) = 2 = h(\mathbf{R}).$$

Protože navíc je hodnost obou maticí rovna počtu neznámých, má soustava jediné řešení. To-to řešení je $\mathbf{x} = (7,5)$.

Soustava lineárních rovnic

$$4x_1 - 5x_2 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

nemá žádné řešení, neboť hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A}) = 1$, kdežto $h(\mathbf{R}) = 2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= -12 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru, protože platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) = 1$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & -12 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Položíme-li $x_2 = t$, obdržíme $x_1 = 2t - 3$. Obecné řešení soustavy je tedy $\mathbf{x} = (2t-3, t)$. Po dosazení konkrétní hodnoty za t, např. $t = 2$, dostaneme partikulární řešení v našem případě $\mathbf{x} = (1,2)$. Dosadíme-li za $t = 0$, máme základní řešení $\mathbf{x} = (-3,0)$.

TEST 12

Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá či nepravdivá.

1. Každá soustava LR má řešení.
2. Soustava $S(2,2)$ má vždy řešení.
3. Existuje soustava LR mající právě dvě řešení.
4. Homogenní soustava LR má vždy řešení.
5. Některé nehomogenní soustavy LR nemají řešení.
6. Obecné řešení soustavy zahrnuje všechna řešení soustavy.
7. Partikulární řešení soustavy je jediné řešení soustavy.
8. Základní řešení soustavy je specielní případ partikulárního řešení soustavy.
9. V základním řešení soustavy je alespoň jedna neznámá rovna nule.
10. Platí-li vztah $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) = m$, má soustava právě jedno řešení.

Správné odpovědi

1. ano; 2. ne; 3. ne; 4. ano; 5. ano; 6. ano; 7. ano; 8. ano; 9. ano; 10. ne.

Modul:	**5.3 Metody řešení soustav lineárních rovnic**

Cílem tohoto modulu je

- seznámit se s nejpoužívanějšími metodami řešení soustav lineárních rovnic,

- naučit se tyto metody vhodným způsobem používat.

Učební jednotka:	**5.3.1 Gaussova eliminační metoda**

<u>Úloha 43.</u>

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$$

Řešení: $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

<u>Úloha 44.</u>

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= -12. \end{aligned}$$

Řešení: $x_3 = t,\ x_2 = -\frac{1}{5}(18 + 8t),\ x_1 = \frac{1}{5}(12 + 7t)$.

Učební jednotka:	**5.3.2 Kondenzační metoda**

<u>Úloha 45.</u>

Kondenzační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}-5x_3} - 4x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22. \end{aligned}$$

Řešení: $x_1 =' -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$.

Učební jednotka:	**5.3.3 Jordanova metoda úplné eliminace**

Úloha 46.

Najděte obecné řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2 \\
-x_1 \qquad + 2x_3 - 3x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 \qquad - 7x_4 &= 7\,.
\end{aligned}
$$

Řešení: $x_3 = t_1,\ x_4 = t_2,\ x_2 = -t_1 + 5t_2 + 4,\ x_1 = 2t_1 + 3t_2 - 1$.

Úloha 47.

Určete všechna základní řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\
2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

Řešení: $\left(\frac{13}{5}, \frac{4}{5}, 0\right),\ \left(\frac{19}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right),\ \left(0, \frac{19}{14}, \frac{13}{14}\right)$.

Učební jednotka:	**5.3.4 Cramerovo pravidlo**

Příklad 28.

Pomocí Cramerova pravidla je možné určit hodnotu jedné nebo několika proměnných, aniž bychom museli počítat hodnoty všech neznámých. Mějme za úkol určit hodnotu neznámé x_2 v soustavě rovnic

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0\,. \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Nejdříve určíme determinant matice soustavy

$$
\det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 12 + 2 - 3 - 3 - 16 = -4.
$$

Matice soustavy je regulární, soustava má právě jedno řešení.

Dále spočteme det A_2

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 8 = -7,$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{7}{4}.$$

TEST 13

1. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

   řešte:

   a) Gaussovou eliminační metodou;

   b) kondenzační metodou;

   c) Jordanovou metodou úplné eliminace;

   d) Cramerovým pravidlem.

2. Užitím Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 7x_2 + 3x_3 &= -7 \ . \end{aligned}$$

3. Kondenzační metodou řešte soustavu rovnic

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4.$$

Správné odpovědi

1. $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$
2. $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$
3. $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$

CVIČENÍ 4

1. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$$

2. Určete obecné řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4' &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \quad &= -3 \\ -3x_1 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 \quad &= -3 \end{aligned}$$

3. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 10. \end{aligned}$$

4. Kondenzační metodou řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= -1. \end{aligned}$$

5. Užitím Cramerova pravidla řešte soustavou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &= -2 \\ x_1 - \quad 4x_2 + \quad 2x_3 &= -1 \\ x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 &= \quad 0. \end{aligned}$$

6. Najděte všechna základní řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 - \quad 5x_2 - \quad 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + \quad 5x_2 - \quad 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \quad x_2 - \quad 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

7. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - \quad x_2 + \quad 3x_3 &= \quad 9 \\ 3x_1 - \quad 5x_2 + \quad x_3 &= -4 \\ 4x_1 - \quad 7x_2 + \quad x_3 &= \quad 5. \end{aligned}$$

8. Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ má soustava

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 - \quad 3x_2 &= -7 \\ x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &= -2 \\ -x_1 + \quad x_2 + \quad px_3 &= 0 \end{aligned}$$

aspoň jedno řešení?

DODATKY KE KAPITOLE 5

Klíčová slova

Soustava lineárních rovnic, matice soustavy, rozšířená matice soustavy, obecné řešení, Frobeniova věta, partikulární řešení, základní řešení, homogenní soustava, nehomogenní soustava, ekvivalentní úpravy, úplná eliminace.