

RNDr. Jiří Dočkal, CSc.

MATEMATIKA I

Řešené příklady

Uváděné řešené příklady jsou vybrány a řazeny v návaznosti na orientační učební pomůcku
Doc.RNDr.Ing. Josef Nedoma, CSc.: MATEMATIKA I. Tato sbírka řešených příkladů je určena jako
orientační pomůcka pro samostatnou přípravu ke konzultacím kombinovaného studia FSI VUT v Brně.

BRNO, září 2002

autor

Řazení příkladů:

1) Množiny	
2) Matematická logika	
3) Reálná a komplexní čísla	
4) Matice a algebraické vektory	
5) Determinanty	
6) Soustavy lineárních rovnic	
7) Polynomy a jejich podíly	
8) Geometrické vektory	
9) Analytická geometrie v prostoru	
10) Funkce jedné reálné proměnné	
11) Limita a spojitost	
12) Derivace funkce	
13) Taylorova věta a aplikace	
14) Primitivní funkce	
15) Riemannův integrál	
16) Aplikace Riemannova integrálu	

Seznam použité literatury:

1. Eliaš,J.,Horváth,J.,Kajan,J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky.1.časť (4.vydanie),Bratislava, Alfa,1976
2. Jirásek,F.,Kriegelstein,E,Tichý,Z.: Sbíрка řešených příkladů z matematiky. Praha,SNTL-Alfa,1987
3. Mrhačová,H.: Cvičení z lineární algebry, Skriptum, VUT v Brně, ES Brno, 1982
4. Nedoma,J.: Matematika I,Shrnutí a přehled, Orientační metodická pomůcka, rukopis,2002
5. Nedoma,J.: Matematika I. Skriptum FSI VUT v Brně, 2002
6. Skála,J.: Matematika I, řešené úlohy pro cvičení, Skriptum, VŠST v Liberci, 1982
7. Tomica,R.: Cvičení z matematiky pro I.ročník, Skriptum, VUT Brno, SNTL Praha, 1965
8. Vosmanská,G.,Rádl,P.: Cvičení z matematické analýzy, Skriptum,(3.vydání), VŠZ Brno,1994

1. Množiny

1.1.1 Určete všechny podmnožiny množiny $M = \{3, -4, 5\}$.

Množina M má tyto podmnožiny:

Prázdná množina \emptyset

Podmnožiny o jednom prvku $\{3\}, \{-4\}, \{5\}$

Podmnožiny o dvou prvcích $\{3, -4\}, \{3, 5\}, \{-4, 5\}$

Podmnožiny o třech prvcích $\{3, -4, 5\} = M$

Množina M obsahuje 8 podmnožin včetně prázdné množiny a dané množiny.

1.1.2 Určete průnik $A \cap B$ množin A, B , kde A je množina všech prvočísel, B množina všech sudých čísel.

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \quad A \cap B = \{2\}$$

1.1.3 Jsou dány množiny $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Určete

a) $A \cap B$, $B \cap C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $A \cup B$, $B \cup C$

d) $A \cup B \cup C$

Hledané množiny jsou :

a) $A \cap B = \{5, 7\}$, $B \cap C = \{5, 6, 7, 8\}$

b) $A \cap B \cap C = \{5, 7\}$

c) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $A \cup B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.2.1 Jsou dány intervaly $A = (-4, 3)$, $B = \langle -2, 2 \rangle$, $C = (1, 5)$.

Určete:

a) $A \cup B$

c) $B \cup C$

e) $A \cap B$

g) $B \cap C$

b) $A \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

f) $A \cap C$

h) $A \cap B \cap C$

Hledané množiny jsou :

a) $A \cup B = (-4, 3)$

c) $B \cup C = \langle -2, 5 \rangle$

e) $A \cap B = \langle -2, 2 \rangle$

b) $A \cap C = (-4, 5)$

d) $A \cup B \cup C = (-4, 5)$

f) $A \cap C = (1, 3)$

g) $B \cap C = (1, 2)$

h) $A \cap B \cap C = (1, 2)$

1.2.2 Jsou dány intervaly $A = (-\infty, 2)$, $B = \langle 1, 3 \rangle$, $C = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.

Určete:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $(C \cup B) \cap A$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

Výsledné intervaly jsou:

a) $(A \cup B) \cap C = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$

b) $(C \cup B) \cap A = \langle -1, 2 \rangle$

c) $A \cap B \cap C = \{1\}$

d) $A \cup B \cup C = (-\infty, \infty)$

2. Matematická logika

2.1.1 Rozhodněte, které z následujících slovních spojení je výrok . Pokud se jedná o výrok, určete jeho pravdivost:

- Číslo x je nezáporné.
- Číslo 5 je záporné.
- Každý obdélník je rovnoběžník.
- Trojúhelník ABC je pravouhlý.
- $3:0$ je 0

Řešení :

- není výrok, protože o x nic nevíme
- je výrok a to nepravdivý
- je výrok a to pravdivý
- není výrok, protože o trojúhelníku ABC nic nevíme
- není výrok, protože dělení nulou není definováno

2.1.2 Utvořte negaci výroků:

- dnes je svátek
- všichni žijící lidé jsou menší než 280 cm
- $x > 1$, je-li x reálné číslo

Řešení:

- dnes není svátek
- existuje žijící člověk, který má 280 cm nebo více
- $x \leq 1$, je-li x reálné číslo

2.1.3 Utvořte disjunkci \vee dvou výroků p , q a určete pravdivost složeného výroku, je-li
 p = číslo 12 je násobkem čísla 2,
 q = číslo 12 je násobkem čísla 5 ,

Řešení :

$$p \vee q = (\text{číslo 12 je násobkem čísla 2}) \vee (\text{číslo 12 je násobkem čísla 5}) = \\ = \text{číslo 12 je násobkem čísla 2 nebo 5}$$

Složený výrok je pravdivý přesto, že výrok q je nepravdivý.

2.1.4 Určete konjunkci \wedge dvou výroků p , q , je-li
 p = reálné číslo x je menší než 2 ,
 q = reálné číslo x je větší nebo rovno číslu -1 ,

Řešení :

$$p \wedge q = (x \leq 2) \wedge (x > -1) = (-1, 2)$$

2.1.5 Dosad'te výroky $p = \sqrt{4} = -2$, $q = 3 + 4 = 7$ do uváděné výrokové formule

- a) $p \Rightarrow q$
- b) $\neg p \Rightarrow q$
- c) $q \Rightarrow p$
- d) $\neg q \Rightarrow \neg p$

- Řešení :
- a) je-li $\sqrt{4} = -2$, pak $3+4=7$ výrok pravdivý
 - b) je-li $\sqrt{4} \neq -2$, pak $3+4=7$ výrok pravdivý
 - c) je-li $3+4=7$, pak $\sqrt{4} = -2$, výrok nepravdivý
 - d) je-li $3+4 \neq 7$, pak $\sqrt{4} \neq -2$, výrok pravdivý

2.1.6 Určete pravdivostní hodnotu složeného výroku $((2.3 = 6) \vee (3.4 = 16)) \wedge (1 < 2)$

$$p = (2.3 = 6), \quad q = (3.4 = 16), \quad p \vee q = ((2.3 = 6) \vee (3.4 = 16)),$$

$$v = ((2.3 = 6) \vee (3.4 = 16)) \wedge (1 < 2)$$

Pravdivostní tabulka pak má tvar:

p	q	$p \vee q$	v
1	0	1	1

Z uvedené tabulky plyne, že složený výrok je pravdivý.

2.1.7 Určete pravdivostní hodnotu složeného výroku

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

3. Reálná a komplexní čísla

3.1.1 Určete supremum, infimum, maximum a minimum množiny \mathbf{M}

a) $\mathbf{M} = \langle -5, -2 \rangle$

b) $\mathbf{M} = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$

c) $\mathbf{M} = (-1, \infty)$

a) $\sup \mathbf{M} = -2$, $\inf \mathbf{M} = -5$, $\max \mathbf{M}$ neexistuje (otevřená množina), $\min \mathbf{M} = -5$

b) $\sup \mathbf{M} = 3$, $\inf \mathbf{M} = 0$, $\max \mathbf{M} = 3$, $\min \mathbf{M} = 0$

c) $\sup \mathbf{M}$ neexistuje, $\inf \mathbf{M} = -1$, $\max \mathbf{M}$ neexistuje (otevřená množina), $\min \mathbf{M}$ neexistuje

3.1.2 Zapište pomocí nerovnic s absolutní hodnotou okolí daného čísla o daném poloměru:

a) okolí čísla 6 o poloměru 2

b) okolí čísla -3 o poloměru 1

c) okolí čísla 1.5 o poloměru 0.5

Řešením jsou nerovnice:

a) $(6-2, 6+2) = (4, 8) = \{x \in \mathbf{R}; |x-6| < 2\}$

b) $(-3-1, -3+1) = (-4, -2) = \{x \in \mathbf{R}; |x+3| < 1\}$

c) $(1.5-0.5, 1.5+0.5) = (1, 2) = \{x \in \mathbf{R}; |x-1.5| < 0.5\}$

3.1.3 Pomocí binomické věty řešte $(2 - \sqrt{3})^3$

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^3 &= \binom{3}{0} \cdot 2^3 \cdot (-\sqrt{3})^0 + \binom{3}{1} \cdot 2^2 \cdot (-\sqrt{3})^1 + \binom{3}{2} \cdot 2^1 \cdot (-\sqrt{3})^2 + \binom{3}{3} \cdot 2^0 \cdot (-\sqrt{3})^3 = \\ &= 1 \cdot 8 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

3.2.1 Vypočtěte $(2 + 3i)^2 + (1 - 2i)$

$$\begin{aligned} (2 + 3i)^2 + (1 - 2i) &= (2 + 3i) \cdot (2 + 3i) + (1 - 2i) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3i + 2 \cdot 3i + 3 \cdot 3i^2 + 1 - 2i = \\ &= 4 + 6i + 6i - 9 + 1 - 2i = -4 + 10i \end{aligned}$$

3.2.2 Vypočtěte $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$

$$\begin{aligned} \frac{2 - 3i}{5 + 2i} &= \frac{2 - 3i}{5 + 2i} \cdot \frac{5 - 2i}{5 - 2i} = \frac{(2 - 3i) \cdot (5 - 2i)}{(5 + 2i) \cdot (5 - 2i)} = \frac{10 - 15i - 4i + 6i^2}{25 + 10i - 10i - 4i^2} = \\ &= \frac{10 - 19i - 6}{25 + 4} = \frac{4 - 19i}{29} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i \end{aligned}$$

3.2.3 Vypočtete $|2 - 3i|$

$$|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

3.3.1 Řešte binomickou rovnicí $x^3 - 1 = 0$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}i$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - \\ +x^2 \end{array}$$

$$0 + x^2 - 1$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - \\ +x \end{array}$$

$$0 + x - 1$$

$$\begin{array}{r} -x - \\ +1 \end{array}$$

$$0$$

Kořeny jsou $x_0 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$, $x_2 = -x_1 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{3}$

Zkouška :

$$(x - 1)(x + \frac{1}{2} - i\sqrt{3})(x + \frac{1}{2} + i\sqrt{3}) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

3.3.2 Řešte rovnicí $z^5 + 1 = 0$.

Budeme hledat řešení rovnice převedením na problematiku nalezení kořenů komplexního čísla $z = -1$.

$$z^5 + 1 = 0 \rightarrow z^5 = -1 \rightarrow z = \sqrt[5]{-1}$$

číslo $z = -1$ převedeme na goniometrický tvar

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi \quad \text{pak}$$

$$\sqrt[5]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{5} \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dostaneme tedy pět kořenů :

$$z_0 = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ,$$

$$z_1 = \cos 108^\circ + i \sin 108^\circ,$$

$$z_2 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

$$z_3 = \cos 252^\circ + i \sin 252^\circ,$$

$$z_4 = \cos 324^\circ + i \sin 324^\circ.$$

4. Vektory a matice

4.1.1 Sečtěte vektory $\mathbf{a} = [1, 4, -2]$, $\mathbf{b} = [3, -2, 2]$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [1, 4, -2] + [3, -2, 2] = [1 + 3, 4 - 2, -2 + 2] = [4, 2, 0]$$

4.1.2 Odečtěte vektory $\mathbf{a} = [1, 4, -2]$, $\mathbf{b} = [3, -2, 2]$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [1, 4, -2] - [3, -2, 2] = [1 - 3, 4 + 2, -2 - 2] = [-2, 6, -4]$$

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = [3, -2, 2] - [1, 4, -2] = [3 - 1, -2 - 4, 2 + 2] = [2, -6, 4]$$

Platí tedy: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ 4.1.3 Určete vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}$, je-li $\mathbf{a} = [2, -5, 1, 9, -7]$

$$\mathbf{v} = 2[2, -5, 1, 9, -7] = [4, -10, 2, 18, -14]$$

4.1.4 Určete vektor $\mathbf{v} = -3\mathbf{a} - 0\mathbf{b}$, je-li $\mathbf{a} = [3, 2, -1]$ $\mathbf{b} = [0, 3, 9]$

$$\mathbf{v} = -3\mathbf{a} - 0\mathbf{b} = -3[3, 2, -1] - 0[0, 3, 9] = [-9, -6, 3]$$

4.2.1 Jsou dány čtvercové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) vypočtěte $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

b) vypočtěte $\mathbf{B} - \mathbf{A}$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

c) vypočtěte $2 \cdot \mathbf{C}$

$$2 \cdot \mathbf{C} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

d) vypočtěte $\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{C}$

$$\begin{aligned}
 A-3B+2C &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -18 & -15 & -12 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -2 \\ -12 & -6 & -9 \\ 7 & -10 & 12 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e) vypočítejte $(A+B)-(B-A)-2A$

$$\begin{aligned}
 (A+B)-(B-A)-2A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \\ 7 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -4 & -10 & -2 \\ -14 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4.2.2 Vypočítejte $A+E$, je-li

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Vypočítejte $A+B$, je-li

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -b \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c+b \\ d+c & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.1 Vypočítejte součin matic $A \cdot B$ a $B \cdot A$, jestliže

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) + 7 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 4 + 7 \cdot 7 \\ (-2) \cdot 1 + 9 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 & (-2) \cdot 0 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 7 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 53 & 29 \\ -9 & 64 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot (-5) + 0 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 4 \\ (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) & (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & (-3) \cdot 7 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) & 5 \cdot (-5) + 7 \cdot 9 & 5 \cdot 7 + 7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -17 & 51 & -5 \\ 1 & 38 & 63 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.3.2 Přesvědčeme se, že platí $A \cdot E = E \cdot A = A$ je-li E jednotková matice stejného řádu jako matice A ,

která je tvaru $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A \cdot E &= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-7) \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A \\ E \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot (-7) + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

4.3.3 Vypočítejte součin matic $A \cdot B$ a $B \cdot A$, jestliže

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 22 \\ 1 & -48 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 8 \\ 39 & -38 \end{bmatrix}$$

4.3.4 Vypočtete součin matic $A \cdot B$ a $B \cdot A$, jestliže

$$A = [5 \quad 2 \quad -3] \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [5 \quad 2 \quad -3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = [-4]$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [5 \quad 2 \quad -3] = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -6 \\ -5 & -2 & 3 \\ 20 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

4.3.5 Vypočtete součin A^2 , A^3 , je-li

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ -10 & -39 \end{bmatrix}$$

4.3.6 Vypočtete součin matic $A \cdot B$, kde $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4.4.1 Vypočítejte hodnotu $h(A)$ matice A , je-li

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 5 \\ 10 & 22 & 8 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 5 \\ 10 & 22 & 8 & -18 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / (2) \\ \\ / (2) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 11 & 4 & -9 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1.\checkmark \\ + (1.\checkmark) \cdot (-3) \\ + (1.\checkmark) \cdot (-5) \end{array} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -11 & 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{vynech.} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 11 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow h(A) = 2 \end{aligned}$$

4.4.2 Vypočítejte hodnotu $h(A)$ matice A , je-li

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1.\checkmark \\ -2 \cdot (1.\checkmark) \\ -(1.\checkmark + 2.\checkmark) \\ +1.\checkmark \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{vynech.} \\ \text{vynech.} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow h(A) = 2 \end{aligned}$$

4.4.3 Rozhodněte, pro které číslo a má matice A hodnotu $h(A)=3$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 3.\checkmark \\ \rightarrow 1.\checkmark \\ \rightarrow 2.\checkmark \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1.\checkmark \\ 2.\checkmark \\ +2 \cdot (1.\checkmark) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1.\checkmark \\ 2.\checkmark \\ -\frac{4}{3} \cdot (2.\checkmark) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 - \frac{4}{3}a \end{bmatrix}$$

$$h(A)=3 \quad \text{jen pro } 3 - \frac{4}{3}a \neq 0, \quad \text{tedy pro } a \neq \frac{9}{4}$$

5. Determinanty

5.1.1 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (3) \cdot (-6) - (4) \cdot (5) = -18 - 20 = -38$$

5.1.2 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} = a \cdot g - c \cdot e$$

5.1.3 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det A = \begin{vmatrix} 2+3i & 1+i \\ 1-i & 2-3i \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2+3i & 1+i \\ 1-i & 2-3i \end{vmatrix} = (2+3i) \cdot (2-3i) - (1+i) \cdot (1-i) = (4+9) - (1+1) = 11$$

5.1.4 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

5.1.5 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det C = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$

$$\det C = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

5.2.1 Vypočtěte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 10 \end{vmatrix}$ pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ -7 & 6 & 5 & -7 & 6 \\ 8 & -9 & 10 & 8 & -9 \end{matrix} =$$

$$= +2 \cdot 6 \cdot 10 + (-3) \cdot 5 \cdot 8 + 4 \cdot (-7) \cdot (-9) - 4 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 5 \cdot (-9) - (-3) \cdot (-7) \cdot 10 = +120 - 120 + 252 - 192 + 90 - 210 = -60$$

5.2.2 Vypočítejte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a.c.b + b.a.c + c.b.a - c.c.c - b.b.b - c.c.c = 3.a.b.c - c^3 - b^3 - a^3$$

5.2.3 Vypočítejte hodnotu determinantu $\det J(r,x,z) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -r \sin x & r \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \det J(r,x,z) &= \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -r \sin x & r \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos x.(r \cos x).1 + \sin x.0.0 + (-r \sin x).0.0 - \\ &- 0.(r \cos x).0 - \cos x.0.0 - \sin x.(-r \sin x).1 = r \cos^2 x + 0 + 0 - 0 - 0 + r \sin^2 x = \\ &= r.(\cos^2 x + \sin^2 x) = r.1 = r \end{aligned}$$

5.2.4 Přesvědčete se, že determinant matice A a transponované matice A^T mají stejnou hodnotu,

když matice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Původní matice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, transponovaná matice $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 56 - 105 - 96 = -217$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 56 - 105 - 96 = -217$$

5.3.1 Vypočítejte hodnotu determinantu 4.řádu $\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

pomocí Laplaceovy věty o rozvoji determinantu a to podle 3.řádku

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -8 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-7) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -8 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \\ &+ 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-18 + 80 - 64) + 7 \cdot (-27 + 40 - 40 - 96) + \\ &+ 6 \cdot (54 - 64 + 80 - 18) = -4 - 861 + 312 = -553 \end{aligned}$$

5.3.2 Přesvědčete se, že různé rozvoje dají stejnou hodnotu determinantu. Rozviňte determinant 4.řádu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{podle 1.řádku a podle 1.sloupce}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (4 + 4 + 0 - 6 - 2 - 0) - (-8 + 0 - 12 - 0 + 4 + 16) + (0 + 0 + 8 - 0 - 4 - 4) = 0 - 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 0 = \\ &= 2 \cdot (4 + 4 + 0 - 6 - 2 - 0) - 2 \cdot (-4 + 0 + 0 + 2 + 2 - 0) + 4 \cdot (-4 + 0 - 1 + 2 + 3 - 0) = 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

5.3.3 Rozvojem dle řádku samých nul se přesvědčete, že hodnota determinantu A, jehož řádek (sloupec) obsahuje samé nuly má nulovou hodnotu.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 0 - 0 + 0 = 0$$

5.4.1 Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočtete hodnotu determinantu $\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1.\check{r} \\ -2 \cdot (1.\check{r}) \\ -1 \cdot (1.\check{r}) \end{matrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1.\check{r} \\ 2.\check{r} \\ +\left(\frac{2}{3}\right)(2.\check{r}) \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Zkouška pomocí Sarrusova pravidla :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

5.4.2 Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočítejte hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ -2.(1.\check{r}) \\ .3+(-5).(2.\check{r}) \\ .5-4.(3.\check{r}) \end{array} = \frac{1}{3.5} \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -20 & -3 & -1 \\ 0 & 25 & 14 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ 2.\check{r} \\ +10.(2.\check{r}) \\ .4+5.(3.\check{r}) \end{array} =$$

$$= \frac{1}{3.5.4} \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 41 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ 2.\check{r} \\ 3.\check{r} \\ +3.(3.\check{r}) \end{array} = \frac{1}{3.5.4} \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ 2.\check{r} \\ 3.\check{r} \\ .13+2.(3.\check{r}) \end{array} =$$

$$= \frac{1}{3.5.4.13} \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = \frac{3.2.(-13).50}{3.5.4.13} = -5$$

5.4.3 Přesvědčete se, že hodnota determinantu A a determinantu transponované matice k matici A je stejná.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & -a \end{vmatrix} = a.(-a) - c.b = -a^2 - c.b$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = a.(-a) - b.c = -a^2 - c.b$$

5.4.4 Přesvědčete se, že výměna dvou po sobě jdoucích řádků způsobí změnu znaménka.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 - 12 - 9 - 4 - 4 = -40$$

Výměna prvních dvou řádků:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 4 + 12 + 12 - 1 = 40$$

6. Řešení soustav lineárních rovnic

6.1.1 Řešte soustavu lineárních rovnic $A \cdot X = B$ pomocí Gaussovy eliminační metody

$$2x - 3y + 4z = 8$$

$$3x + 5y - z = 10$$

$$7x - y + 7z = 15$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 10 \\ 7 & -1 & 7 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ +(-1,5).(1.\check{r}) \\ +(-3,5).(1.\check{r}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 9,5 & -7 & -2 \\ 0 & 9,5 & -7 & -13 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ 2.\check{r} \\ +(-1).(2.\check{r}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 9,5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right)$$

Protože matice soustavy má hodnotu $h(A)=2$ a rozšířená matice soustavy má hodnotu $h(A | B)=3$, nemá soustava $A \cdot X = B$ dle Frobeniovy věty řešení

6.1.2 Řešte soustavu lineárních rovnic $A \cdot X = B$ pomocí Gaussovy eliminační metody

$$x + 2y - 3z = 5$$

$$3x - 4y + 5z = 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1.\check{r} \\ +(-3).(1.\check{r}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -10 & 14 & -9 \end{array} \right)$$

Matice soustavy i rozšířená matice soustavy mají hodnotu $h(A)=h(A | B)=2$, počet proměnných $n=3$. Podle věty Frobeniovy je $n-h(A)=1$ proměnná volitelná.

Zvolme tedy $z = t$. Pak ze soustavy plyne

$$z = t \quad y = \frac{1}{10}(14t + 9) \quad x = \frac{1}{5}(t + 16) \quad ,$$

kde t je libovolné reálné číslo.

6.1.3 Řešte soustavu lineárních rovnic $A \cdot X = B$ pomocí Gaussovy eliminační metody

$$5x - 9y + 5z = 1$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$2x + 3y + 3z = 2$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -9 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{1.\check{r}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-5 \cdot (1.\check{r}) \\ -2 \cdot (1.\check{r})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{2.\check{r}} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-7 \cdot (2.\check{r})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{-7 \cdot (2.\check{r})} \end{aligned}$$

zpětný chod :

$$z = -5 \quad y = 1 \quad x = 0 - z + 2y = 5 + 2 = 7, \text{ když dosadíme vypočtené hodnoty } y \text{ a } z.$$

6.1.4 Řešte soustavu lineárních rovnic $A \cdot X = 0$ pomocí Gaussovy eliminační metody

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1.\check{r} \\ -4 \cdot (1.\check{r}) \\ -(1.\check{r}) \\ -(1.\check{r})}} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2.\check{r} \\ +4 \cdot (2.\check{r}) \\ (vynech) \\ (-1) \cdot (2.\check{r})}} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{+4 \cdot (2.\check{r})} \\ & \square \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \end{array} \right) \xrightarrow{/(-21)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$h(A) = h(A | B) = n = 3, \text{ soustava má triviální řešení } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

6.1.5 Řešte soustavu lineárních rovnic $A \cdot X = B$ pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\2x_1 - 6x_2 + x_3 &= 3\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 1 & 3 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & 1 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{10} \end{array} \right)$$

$h(A)=2$, $h(A/B)=2$, $n=3$, tedy jednu proměnnou volíme jako parametr

$$x_3 = t$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{10}$$

$$x_1 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{10}\right) - 3 \cdot t = \frac{12}{10} - 2t$$

6.2.1 Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + y + 3z &= 7 \\x - 3y + 2z &= 5 \\x + y + z &= 3\end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 + 2 + 9 - 2 - 1 = 8, \det(A) \neq 0, \text{ tedy soustava má právě jedno řešení}$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21 + 15 + 6 + 27 - 14 - 5 = 8 \quad x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{tedy } x = 1$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 9 + 14 - 15 - 6 - 7 = 0 \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{0}{8} = 0 \quad \text{tedy } y = 0$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 7 + 5 + 21 - 5 - 3 = 16 \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{tedy } z = 2$$

7. Polynomy a jejich podíl

7.1.1 Rozložte polynom $2x^2 + 3x + 1$ na součin kořenových činitelů.

$$2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 2x + x + 1 = 2x(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(2x + 1)$$

nebo

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \quad x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x + 1) = (2x + 1)(x + 1)$$

7.1.2 Rozložte polynom $x^3 - 3x - 2$ na součin kořenových činitelů.

$$x^3 - 3x - 2 = x^3 - 4x + x - 2 = x(x^2 - 4) + x - 2 = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) + x - 2 = \\ = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x - 2) \cdot (x + 1)^2$$

7.1.3 Rozložte polynom $x^2 + 7x + 12$ na součin kořenových činitelů.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3) \cdot (x + 4)$$

7.1.4 Rozložte polynom $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ na součin kořenových činitelů.

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = x^3 - 8 - 7x(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 7x(x - 2) = \\ = (x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 7x) = (x - 2)(x^2 - 5x + 4) = (x - 2)(x - 1)(x - 4)$$

7.1.5 Rozložte polynom $x^3 - 3x^2 + 4$ na součin kořenových činitelů.

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = x^2(x - 2) - (x^2 - 4) = (x - 2)(x^2 - x - 2) = \\ = (x - 2)^2(x + 1)$$

7.2.1 Užitím Hornerova schématu rozložte na součin kořenových činitelů

$$x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36$$

	1	2	-9	-4	30	-36
1	1	3	-6	-10	20	-16
-1	1	1	-10	6	24	-60
2	1	4	-1	-6	18	0
2	1	6	11	16	50	
-2	1	2	-5	4	10	
3	1	7	20	54	180	
-3	1	1	-4	6	0	
-3	1	-2	2	0		

$$x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36 = (x - 2)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x + 18) = \\ = (x - 2)(x + 3)(x^3 + x^2 - 4x + 6) = \\ = (x - 2)(x + 3)^2(x^2 - 2x + 2)$$

7.2.2 Užitím Hornerova schématu rozložte na součin kořenových činitelů

$$x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x$$

	1	-6	11	-2	-12	8	0
0	1	-6	11	-2	-12	8	0
1	1	-5	6	4	-8	0	
1	1	-4	2	6	-2		
-1	1	-6	-2	-8	0		
-1	1	-7	19	-27			
2	1	-4	4	0			
2	1	-2	0				
2	1	0					

$$x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x = x(x-1)(x+1)(x-2)^3$$

7.3.1 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} \quad / \cdot (x+1)(2x+1)$$

$$x = A(2x+1) + B(x+1)$$

$$x = x(2A+B) + (A+B) \quad \cdot \quad 2A+B=1 \quad , \quad A+B=0$$

tedy $A=1, \quad B=-1$

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{2x+1}$$

7.3.2 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4}$ na parciální zlomky

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4} \quad / \cdot (x-2)^4$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = A(x-2)^3 + B(x-2)^2 + C(x-2) + D$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = A(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + B(x^2 - 4x + 4) + C(x-2) + D$$

vyřešením soustavy pro A, B, C, D dostaneme

$$A=1, \quad B=0, \quad C=-1, \quad D=1$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4}$$

7.3.3 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \frac{8x-31}{x^2-9x+14}$ na parciální zlomky

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-2} \quad / \cdot (x-7)(x-2)$$

$$8x-31 = A(x-2) + B(x-7)$$

užijeme dosazovací metodu

$$x=2 \quad \rightarrow \quad 16-31 = B(2-7) \quad \rightarrow \quad B=3$$

$$x=7 \quad \rightarrow \quad 56-31 = A(7-2) \quad \rightarrow \quad A=5$$

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{5}{x-7} + \frac{3}{x-2}$$

7.3.4 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ na parciální zlomky

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad / \cdot (1+x^3)$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$1 = x^2(A+B) + x(-A+B+C) + (A+C)$$

$$A+B = 0$$

$$-A+B+C = 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

$$A + C = 1$$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

7.3.5 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$ na parciální zlomky

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} \quad / \cdot (x^2+2)^2$$

$$x^3+x-1 = (Ax+B)(x^2+2) + Cx+D$$

$$x^3+x-1 = x^3(A) + x^2(B) + x(2A+C) + (2B+D)$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$2A + C = 1 \quad \rightarrow \quad C = -1, \quad D = -1$$

$$2B + D = -1$$

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} - \frac{x+1}{(x^2+2)^2}$$

8. Geometrické vektory

- 8.1.1 V trojúhelníku ABC je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, S je střed strany BC, T těžiště trojúhelníka .
Pomocí vektorů \vec{a} a \vec{b} určete vektory \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AS} , \overrightarrow{AT} .

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AS} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

- 8.1.2 Určete projekci vektoru \vec{a} na přímku p , je-li dáno $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{a}| = 2$.

$$a_p = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \quad \text{proto } a_p = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} .$$

- 8.2.1 Jaké musí být číslo x , aby dané dva vektory $\vec{a} = xi + 5j$, $\vec{b} = 3i - j$ byly kolineární .

$$\text{Musí platit } \vec{a} = k \cdot \vec{b} \rightarrow 5j = -k \cdot j \rightarrow k = -5 . \text{ Tedy je } x = k \cdot 3 = (-5) \cdot 3 = -15 .$$

- 8.2.2 Vyšetřete, zda dané tři vektory $\vec{a} = k$, $\vec{b} = i - j - k$, $\vec{c} = i - j + k$ jsou komplanární.
Jestliže ano, nalezněte vztah mezi nimi.

Pro závislost musí platit $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$, tedy musíme řešit soustavu tří lineárních rovnic :

$$0 \cdot m + 1 \cdot n + 1 \cdot p = 0$$

$$0 \cdot m - 1 \cdot n - 1 \cdot p = 0$$

$$1 \cdot m - 1 \cdot n + 1 \cdot p = 0$$

Z prvních dvou rovnic plyne $p = -1$ a $n = 1$, dosazením do třetí rovnice je $m = 2$.

Dané tři vektory jsou komplanární .

- 8.3.1 Vynásobte skalárně vektory $\vec{a} = (3i - 2j)$, $\vec{b} = (i + 4j)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3i - 2j) \cdot (i + 4j) = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 = -5$$

- 8.3.2 Vynásobte skalárně vektory $\vec{a} = 2i + 3j + \sqrt[3]{2}k$, $\vec{b} = -2i + 2j + \sqrt[3]{4}k$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2i + 3j + \sqrt[3]{2}k) \cdot (-2i + 2j + \sqrt[3]{4}k) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = -4 + 6 + 2 = 4$$

8.3.3 Určete úhel vektorů $\vec{a} = 3i + 2j$, $\vec{b} = i + 5j$.

$$\vec{a} = 3i + 2j, \quad \vec{b} = i + 5j$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{13}{13 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tedy } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

8.3.4 Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = 2i - 5j + k$, $\vec{b} = 3i + 2j + 4k$ jsou na sebe kolmé.

$$\vec{a} = 2i - 5j + k, \quad \vec{b} = 3i + 2j + 4k$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{0}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{29}} = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Tedy vektory jsou na sebe kolmé.

8.4.1 Určete vektorový součin vektorů $\vec{a} = 2i - 3j + k$, $\vec{b} = -i + 2j - 4k$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2i - 3j + k) \times (-i + 2j - 4k) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 12i - j + 4k - 3k - 2i + 8j = 10i + 7j + k$$

8.4.2 Vypočítejte $|\vec{a} \times \vec{b}|$ a určete geometrický význam vypočtené hodnoty, je-li

$$\vec{a} = 2i + 3j, \quad \vec{b} = 3j + 2k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2i + 3j) \times (3j + 2k) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6i + 0 + 6k - 0 - 0 - 4j = 6i - 4j + 6k$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Geometrický význam je obsah rovnoběžníka z uvedených vektorů.

8.5.1 Vypočtěte hodnotu smíšeného součinu $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$, jsou-li vektory dány

$$\vec{a} = i - 3j + k, \quad \vec{b} = 2i + j - 3k, \quad \vec{c} = i + 2j + k$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 + 4 - 1 + 6 + 6 = 25$$

nebo

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 1 + 6 + 6 - 1 = 25$$

8.5.2 Zjistěte, zda zadané vektory jsou komplanární

$$\vec{a} = i - 2j + k, \quad \vec{b} = 3i + j - 2k, \quad \vec{c} = 7i + 14j - 13k$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & 14 & -13 \end{vmatrix} = -13 + 28 + 42 - 7 + 28 - 78 = 0$$

Tedy zadané vektory jsou komplanární.

8.5.3 Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu ABCDEFGH, jsou-li dány vrcholy A[3,0,4], B[-1,-1,7], C[0,-2,-3], E[6,5,4].

Objem je dán jako smíšený součin tří vektorů \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AE}

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -1, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (-3, -2, -7), \quad \overrightarrow{AE} = (3, 5, 0)$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 21 - 45 + 18 - 140 - 0 = -146$$

8.5.4 Vypočtěte objem čtyřstěnu ABCD, jsou-li dány body A[1,2,3], B[-1,0,0], C[0,-2,0], D[0,0,-3].

Objem čtyřstěnu ABCD je dán jako $\left| \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}] \right|$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}] &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-48 - 6 - 6 + 12 + 12 + 12) = \\ &= \frac{-24}{6} = -4 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}] \right| = |-4| = 4$$

9. Analytická geometrie v prostoru

9.1.1 Napište rovnici roviny, která je určena body A[1,-2,3], B[-4,5,6], C[7,8,-9].

1) Jeden způsob řešení:

Normálový vektor \mathbf{n} je kolmý k vektorům $\overline{AB} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{c} = (-5, 7, 3)$

a $\overline{AC} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{b} = (6, 10, -12)$,

$$\text{Tedy } \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 10 & -12 \\ -5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 114 \mathbf{i} + 42 \mathbf{j} + 92 \mathbf{k} = (114, 42, 92).$$

Rovnice hledané roviny je $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$, tedy $(x-1, y+2, z-3) \cdot (114, 42, 92) = 0$.

Tedy rovnice je tvaru $57x + 21y + 46z - 153 = 0$.

2) Druhý způsob řešení:

V kartézské soustavě souřadnic má rovnice hledané roviny tvar

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -5 & 7 & 3 \\ 6 & 10 & -12 \end{vmatrix} = -84(x-1) - 50(z-3) + 18(y+2) - \\ -42(z-3) - 30(x-1) - 60(y+2) = -114x - 42y - 92z + 306 = 0 \\ 57x + 21y + 46z - 153 = 0$$

Tedy rovnice je tvaru $57x + 21y + 46z - 153 = 0$.

9.1.2 Určete rovnici roviny, která prochází body M[3,4,5] a N[-6,7,2] a je kolmá k rovině $2x - 3y + 4z - 5 = 0$.

Vektor \mathbf{n}_2 normály hledané roviny je kolmý k vektoru $\overline{MN} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = (-9, 3, -3)$

a k normálovému vektoru $\mathbf{n}_1(2, -3, 4)$ dané roviny, a proto je $\mathbf{n}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{n}_1$.

Rovnice hledané roviny je pak $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ respektive $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.

$$\mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \mathbf{i} + 30 \mathbf{j} + 21 \mathbf{k} = (3, 30, 21)$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = (x-3, y-4, z-5), \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = (x+6, y-7, z-2)$$

pak rovnice je tvaru $3(x-3) + 30(y-4) + 21(z-5) = 0$,

nebo $3(x+6) + 30(y-7) + 21(z-2) = 0$.

Po úpravách dávají obě rovnice týž výsledek $x + 10y + 7z - 78 = 0$.

9.2.1 Napišme obecnou rovnici roviny, která je určena parametrickými rovnicemi

$$x = 3 - 2u + 3v,$$

$$y = 1 + u - 2v,$$

$$z = 3 - 4u + v.$$

Z daných tří rovnic vyloučíme nejprve parametr u . Dostaneme

$$x + 2y = 5 - v,$$

$$z + 4y = 7 - 7v.$$

Vyloučením parametru v z těchto dvou rovnic dostaneme $-7x - 10y + z = -28$,

Po úpravě je obecný tvar rovnice roviny $7x + 10y - z - 28 = 0$.

9.2.2 Napište parametrické rovnice roviny určené třemi body $A[3,-4,5]$, $B[-5,7,3]$, $C[2,4,-5]$.

Platí $\overline{AB} = \mathbf{s}(-8,11,-2)$, $\overline{AC} = \mathbf{t}(-1,8,-10)$. Tedy parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned}x &= 3 - 8u - v, \\y &= -4 + 11u + 8v, \\z &= 5 - 2u - 10v.\end{aligned}$$

9.3.1 Určeme vzdálenost bodu $T[3,6,1]$ od roviny $x + 10y + 7z - 78 = 0$.

Ze vzorce o vzdálenosti plyne

$$v = \frac{|3+10 \cdot 6+7 \cdot 1-78|}{\sqrt{1+100+49}} = \frac{8}{\sqrt{150}} = \frac{4\sqrt{6}}{15}$$

9.3.2 Určete úhel rovin $x + y + z + 1 = 0$ a $x - 5y - 4z + 3 = 0$.

Jde o ostrý úhel, který svírají normály obou rovin. Vypočteme jej pomocí skalárního součinu těchto normálových vektorů $\mathbf{n}_1(1,1,1)$ a $\mathbf{n}_2(1,-5,-4)$.

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|1-5-4|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{42}} = \frac{8}{\sqrt{126}}$$

9.4.1 Napište rovnici přímky dané dvěma body $M[2,9,3]$ a $N[5,3,11]$.

Směrový vektor přímky $\overline{MN} = \mathbf{s}(5-2,3-9,11-3) = \mathbf{s}(3,-6,8)$. Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned}x &= 2 + 3t, \\y &= 9 - 6t, \\z &= 3 + 8t.\end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned}x &= 5 + 3t, \\y &= 3 - 6t, \\z &= 11 + 8t.\end{aligned}$$

Vyloučením parametru dostaneme kanonický tvar rovnice přímky

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-9}{-6} = \frac{z-3}{8} \quad \text{nebo} \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-11}{8}.$$

Přímku můžeme také určit jako průsečnici dvou rovin. Rovnice dostaneme vyloučením parametru t z parametrických rovnic, takže daná přímka je dána vždy dvojicí rovnic :

$$2x + y = 13, \quad 4y + 3z = 45$$

nebo

$$2x + y = 13, \quad 8x - 3z = 7$$

nebo

$$4y + 3z = 45, \quad 8x - 3z = 7.$$

9.4.2 Napište rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou p , určenou body $A[2,1,3]$, $B[7,3,1]$ a prochází bodem $C[-3,5,9]$.

Směrový vektor dané přímky je $\overline{AB} = \mathbf{s}(7-2,3-1,1-3) = \mathbf{s}(5,2,-2)$.

Kanonické rovnice mají tvar $\frac{x+3}{5} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-9}{-2}$,

Nebo jako průsečnice dvou rovin $2x - 5y + 31 = 0$ a $2x + 5z - 39 = 0$

- 9.5.1 Vypočítejte vzdálenost bodu $M[3,-5,-4]$ od přímky $\frac{x}{7} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{2}$.

Bodem M proložíme rovinu kolmou k zadané přímce. Obecná rovnice roviny je tvaru

$$7(x-3) + 6(y+5) + 2(z+4) = 0, \text{ úpravou } 7x + 6y + 2z + 17 = 0.$$

Přímku vyjádříme jako průsečnici dvou rovin ve tvaru

$$6x - 7y = 7 \text{ a } 2x - 7z = -21.$$

Řešíme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$7x + 6y + 2z = -17$$

$$6x - 7y = 7$$

$$2x - 7z = -21, \text{ která má právě jedno řešení}$$

$$P\left[-\frac{119}{89}, -\frac{191}{89}, \frac{233}{89}\right], \text{ což je průsečík přímky s rovinou.}$$

Vzdálenost bodu M od zadané přímky je vzdáleností bodů M a P

$$v = MP = \sqrt{\left(-\frac{119}{89} - 3\right)^2 + \left(-\frac{191}{89} + 5\right)^2 + \left(\frac{233}{89} + 4\right)^2} = \dots = \sqrt{\frac{6297}{89}}.$$

- 9.5.2 Zjistěte vzájemnou polohu přímky $p: x = t + 1, y = -2t - 1, z = 3t + 2$ a roviny $\rho: x - y - z = 0$

Dosazením z rovnice přímky do rovnice roviny dostaneme

$$t + 1 - (-2t - 1) - (3t + 2) = 0$$

$$2t = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow \text{tedy přímka } p \text{ leží v rovině } \rho$$

- 9.5.3 Určete úhel přímky $p: x = t + 1, y = t + 2, z = 3$, který svírá s rovinou $\rho: 2x + 4y + 4z - 3 = 0$.

Normálový vektor roviny je: $\vec{n} = (2, 4, 4)$, směrový vektor přímky je: $\vec{s} = (1, 1, 0)$.

Tedy úhel φ , který svírá přímka s rovinou získáme z rovnice

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0}} = \frac{6}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{odkud plyne } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

- 9.5.4 Vypočítejte ostrý úhel dvou rovin

$$\rho: x + y + z\sqrt{2} = 3, \quad \tau: x - y + z\sqrt{2} = -2$$

Ostrý úhel dvou rovin je ostrý úhel jejich normál, tedy platí

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\tau|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{n}_\tau|} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{2}{\sqrt{4} \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

10. Funkce jedné proměnné

10.1.1 Určete sudost, lichost a periodičnost funkcí :

a) $f(x) = 6 \cdot \sin 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3$

c) $f(x) = 2^{(x-1)}$

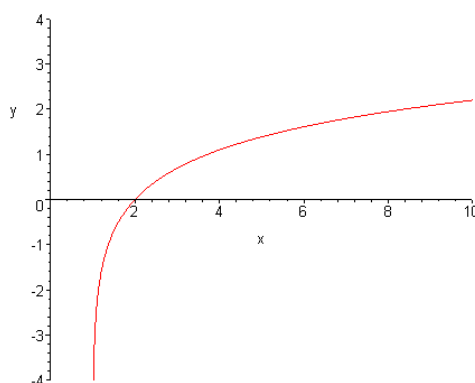
Zadané funkce mají tyto vlastnosti :

a) $f(-x) = 6 \cdot \sin 2(-x) = -6 \cdot \sin 2x = -f(x) \rightarrow$ lichá funkce
 $f(x + 4\pi) = 6 \cdot \sin 2(x + 4\pi) = 6 \cdot \sin 2x = f(x) \rightarrow$ periodická funkce

b) $f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 = \frac{1}{2} \cdot (-1)^3 \cdot (x)^3 = -\frac{1}{2} \cdot (x)^3 = -f(x) \rightarrow$ lichá funkce
 polynom není periodická funkce

c) $f(-x) = 2^{(-x-1)} = 2^{-(x+1)} \neq -f(x) \rightarrow$ není lichá funkce
 $f(-x) = 2^{(-x-1)} = 2^{-(x+1)} \neq f(x) \rightarrow$ není ani sudá funkce
 exponenciální funkce není periodická funkce

10.2.1 Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln(x-1)$

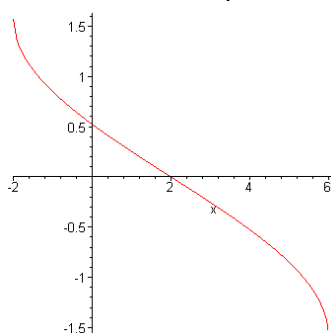


Zadaná funkce je posunutý přirozený logaritmus o jedničku doprava. Pro argument této funkce

platí nerovnice $(x-1) > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow x \in (1, \infty)$

Tedy $D(f) = \{x \in \mathbb{R} ; x > 1\}$

10.2.2 Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin \frac{2-x}{4}$



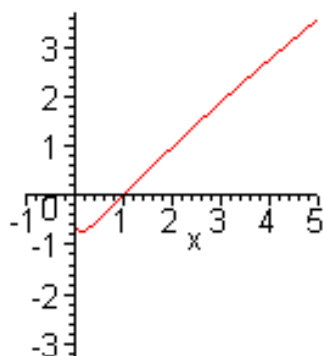
Složená cyklometrická funkce má za argument polynom 1. stupně.
Tento argument je tedy určen nerovnicí

$$-1 \leq \frac{2-x}{4} \leq 1 \rightarrow -4 \leq 2-x \leq 4 \rightarrow -6 \leq -x \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 6 \rightarrow x \in \langle -2, 6 \rangle$$

Definiční obor $D(f) = \{x \in \mathbb{R} ; -2 \leq x \leq 6\}$

10.2.3 Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$



$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ je součin dvou funkcí $f_1 = \sqrt{x}$, která má $D(f_1) = \langle 0, \infty \rangle$,
a $f_2 = \ln x$, která má $D(f_2) = (0, \infty)$.

$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$, tedy $D(f) = \langle 0, \infty \rangle \cap (0, \infty) = (0, \infty)$

11. Limita a spojitost

11.1.1 Vypočtete limitu posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže $a_n = \frac{2n+1}{3n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

11.1.2 Vypočtete limitu posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n^3 + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{n^3 + 1} = (\text{v čitateli je polynom nižšího stupně než ve jmenovateli, proto limita})=0$$

11.2.1 Vypočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = \\ &= 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{nebo přímo dosazením do polynomu} \quad = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

11.2.2 Vypočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \cdot \left(\sin \frac{\pi x}{4}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \cdot \left(\sin \frac{\pi x}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sin \frac{\pi x}{4}\right) = (2-1) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

11.2.3 Vypočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

11.2.4 Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x + \sin x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{(\cos x + \sin x)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

11.2.5 Pomocí vztahu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \left\{ \text{protože } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1 \right\} = 5 \cdot 1 = 5$$

11.3.1 Vypočtěte jednostrannou limitu pomocí substituce $x=a-t$ (resp. $x=a+t$)

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$$

Výpočet:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|(2-t)-2|}{(2-t)-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|-t|}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} 1 = -1$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|(2+t)-2|}{(2+t)-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$$

11.3.2 Vypočtěte jednostrannou limitu $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3x-5)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (3x-5) = \lim_{t \rightarrow 0} (3(3-t)-5) = \lim_{t \rightarrow 0} (4-t) = \lim_{t \rightarrow 0} 4 = 4$$

11.4.1 Vypočtěte nevlastní limitu $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{\ln(x-1)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{\ln(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(2-t)-1}{\ln((2-t)-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3-t}{\ln(1-t)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{\ln(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(2+t)-1}{\ln((2+t)-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3+t}{\ln(1+t)} = +\infty$$

11.4.2 Vypočtěte nevlastní limitu $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{9-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{9-x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(3-t)-1}{9-(3-t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5-2t}{6t-t^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{9-x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(3+t)-1}{9-(3+t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5+2t}{-6t-t^2} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{5+2t}{6t+t^2} = -\infty$$

11.5.1 Vypočtěte limitu funkce v nevlastním bodě $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{1+t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t} = 1$$

11.5.2 Vypočtěte limitu v nevlastním bodě $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}} \stackrel{\text{ : } x^2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3x^{-2}}{\sqrt{3-x^{-4}}} = \frac{2+3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\sqrt{3-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}} = \frac{2+3 \cdot 0}{\sqrt{3-0}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

11.5.3 Vypočtěte pomocí vztahů $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ resp. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

limitu v nevlastním bodě $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^x = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{3z})^{3z} = (\lim_{z \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{z})^z)^3 = e^3$$

11.5.4 Vypočtěte pomocí vztahů $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ resp. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z-1}{z} = 2 \cdot 1 = 2$$

11.6.1 Zjistěte, kde je nespojitá funkce $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ je racionální funkce, která není definovaná v nulovém bodě jmenovatele

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, ale je definovaná v levém i pravém okolí tohoto bodu.

Tedy funkce v bodě $x=1$ není spojitá.

11.6.2 Zjistěte, kde je spojitá funkce $f(x) = \sin(2x + \pi)$

$f(x) = \sin(2x + \pi)$ je goniometrická funkce $\sin x$ posunutá o $\frac{\pi}{2}$ se základní periodou π .

Je definována pro všechna reálná čísla. Jde tedy o funkci spojitou v \mathbf{R} .

12. Derivace funkce

12.1.1 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = 6 \cdot \sin x$

$$f'(x) = 6 \cdot \cos x$$

12.1.2 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = e^x - 2 \cdot \ln x$

$$f'(x) = e^x - \frac{2}{x}$$

12.1.3 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 7x - 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 7x - 6)' = (5x^4)' - (4x^3)' + (8x^2)' - (7x)' - (6)' = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot x^3 - 4 \cdot 3 \cdot x^2 + 8 \cdot 2 \cdot x - 7 - 0 = 20x^3 - 12x^2 + 16x - 7 \end{aligned}$$

12.1.4 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^3 - \sqrt{x} + 1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x} \cdot (x^3 - \sqrt{x} + 1))' = (x^{\frac{1}{2}} \cdot x^3 - x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})' = (x^{\frac{7}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}})' = \\ &= \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

12.1.5 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = 10^x - 5 \log_2 x$

$$f'(x) = (10^x - 5 \log_2 x)' = (10^x)' - 5 \cdot (\log_2 x)' = 10^x \cdot \ln 10 - 5 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

12.2.1 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = (x^2 - 3x + 3) \cdot (x^2 + 2x - 1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 3x + 3) \cdot (x^2 + 2x - 1))' = (x^2 - 3x + 3)' \cdot (x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 3x + 3) \cdot (x^2 + 2x - 1)' = \\ &= (2x - 3) \cdot (x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 3x + 3) \cdot (2x + 2) = 2x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 6x - 2x + 3 + 2x^3 - 6x^2 + \\ &+ 6x + 2x^2 - 6x + 6 = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

12.2.2 Vypočtete 1.derivaci funkce $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

12.2.3 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)' = (x\sqrt{1-x^2})' + (\arcsin x)' = (x)'\sqrt{1-x^2} + \\ &+ x(\sqrt{1-x^2})' + (\arcsin x)' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2) - x^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

12.3.1 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)' = \frac{(2x)' \cdot (1-x^2) - (2x) \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

12.3.2. Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x}{\sin x} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot \sin x - e^x \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{e^x \cdot (\sin x - \cos x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

12.3.3 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x} \right)' = \frac{(1-\ln x)' \cdot (1+\ln x) - (1-\ln x) \cdot (1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (1+\ln x) - (1-\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2} = \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot ((1+\ln x) + (1-\ln x))}{(1+\ln x)^2} = \frac{-\frac{2}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{-2}{x \cdot (1+\ln x)^2} \end{aligned}$$

12.4.1 Vypočtěte 1.derivaci složené funkce $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

$$f'(x) = \left(\sin \frac{x}{2} \right)' = \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' = \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

12.4.2 Vypočtete 1.derivaci složené funkce $f(x) = \arccos \frac{2x^2 - 5}{3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arccos \frac{2x^2 - 5}{3} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2 - 5}{3} \right)^2}} \cdot \left(\frac{2x^2 - 5}{3} \right)' = \\ &= \frac{-3}{\sqrt{9 - (2x^2 - 5)^2}} \cdot \frac{4}{3} x = \frac{-4x}{\sqrt{9 - (2x^2 - 5)^2}} \end{aligned}$$

12.4.3 Vypočtete 1.derivaci složené funkce $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$

$$f'(x) = (e^{\sqrt{1+x}})' = (e^{\sqrt{1+x}}) \cdot (\sqrt{1+x})' = \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+x}}$$

12.4.4 Vypočtete 1.derivaci složené funkce $f(x) = \arctan(5x - 3)$

$$f'(x) = (\arctan(5x - 3))' = \frac{(5x - 3)'}{1 + (5x - 3)^2} = \frac{5}{1 + 25x^2 - 30x + 9} = \frac{5}{25x^2 - 30x + 10}$$

12.4.5 Vypočtete 1.derivaci složené funkce $f(x) = x^{2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{2x})' = (e^{2x \cdot \ln x})' = (e^{2x \cdot \ln x}) \cdot ((2x)' \cdot \ln x + 2x(\ln x)') = \\ &= (x^{2x}) \cdot (2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}) = (x^{2x}) \cdot (2 \ln x + 2) = 2 \cdot (x^{2x}) \cdot (\ln x + 1) \end{aligned}$$

12.5.1 Vypočtete 2.derivaci složené funkce $f(x) = \sin 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin 2x)' = 2 \cos x \\ f''(x) &= (2 \cos x)' = -2 \sin x \end{aligned}$$

12.5.2 Vypočtete 2.derivaci složené funkce $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{4}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{4} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{4} \\ f''(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4} \right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{4} \right) \end{aligned}$$

12.5.3 Vypočtěte derivaci složené funkce $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)' = \frac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(x^2 + 1)}{(1-x^2)^2}$$

12.5.4 Vypočtěte 3. derivaci složené funkce $f(x) = 5x^3$

$$f(x) = 5x^3$$

$$f'(x) = 15x^2$$

$$f''(x) = 30x$$

$$f'''(x) = 30$$

12.6.1 Vypočtěte 1.a 2. derivaci funkce zadané svými parametrickými rovnicemi
 $x = 2(t^2 + 1)$, $y = 2t^3$

$$x = 2(t^2 + 1) , \quad \dot{x} = 2t \quad , \quad \ddot{x} = 2$$

$$y = 2t^3 \quad , \quad \dot{y} = 6t^2 \quad , \quad \ddot{y} = 12t$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \rightarrow y' = \frac{6t^2}{2t} = 3t$$

$$y'' = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)' = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3} \rightarrow y'' = \frac{12t \cdot 2t - 2 \cdot 6t^2}{(2t)^3} = \frac{12t^2}{8t^3} = \frac{3}{2t}$$

12.6.2 Vypočtěte 1.a 2. derivaci funkce zadané svými parametrickými rovnicemi
 $x = \cos t$, $y = \sin t$

$$x = \cos t , \quad \dot{x} = -\sin t \quad , \quad \ddot{x} = -\cos t$$

$$y = \sin t , \quad \dot{y} = \cos t \quad , \quad \ddot{y} = -\sin t$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \rightarrow y' = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

$$y'' = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)' = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3} \rightarrow y'' = \frac{(-\sin t) \cdot (-\sin t) - (-\cos t) \cdot (\cos t)}{(-\sin t)^3} =$$

$$= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} = \frac{-1}{\sin^3 t}$$

13. Taylorova věta a aplikace

13.1.1 Vypočtete diferenciál $df(x)$ funkce $f(x) = 2^{(x-2)}$

$$df(x) = f'(x) \cdot dx = (2^{(x-2)})' dx = (2^{(x-2)} \cdot \ln 2) dx$$

13.1.2 Vypočtete diferenciál $df(x)$ funkce $f(x) = 3 \cos \frac{x-\pi}{2}$ v bodě $x_0 = \pi$.

$$\begin{aligned} df(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \left(3 \cos \frac{x-\pi}{2}\right)'_{(x_0=\pi)} \cdot (x - \pi) = \\ &= \frac{3}{2} (-\sin(\pi - \pi)) \cdot (x - \pi) = 0 \cdot (x - \pi) = 0 \end{aligned}$$

13.1.3 Vypočtete druhý diferenciál $d^2 f(x)$ funkce $f(x) = \tan x$.

$$d^2 f(x) = f''(x) \cdot (dx)^2 = (\tan x)'' \cdot (dx)^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' \cdot (dx)^2 = -2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} (dx)^2$$

13.2.1 Vypočtete Taylorův rozvoj 3. stupně funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ v bodě $x_0 = 3$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} & f(3) &= \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} \\ f'(x) &= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} & f'(3) &= \frac{1}{(1-3)^2} = \frac{1}{4} \\ f''(x) &= (-2) \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x)^3} & f''(3) &= \frac{2}{(1-3)^3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= 2 \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1) = \frac{6}{(1-x)^4} & f'''(3) &= \frac{6}{(1-3)^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{1-x} &= f(3) + \frac{f'(3)}{1!} (x-3) + \frac{f''(3)}{2!} (x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!} (x-3)^3 = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (x-3) + \frac{-\frac{1}{4}}{2} (x-3)^2 + \frac{\frac{3}{8}}{6} (x-3)^3 = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (x-3) - \frac{1}{8} (x-3)^2 + \frac{1}{16} (x-3)^3 \end{aligned}$$

13.2.2 Vypočtete Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\
 f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\
 f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\
 f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \\
 f''''(x) &= \cos x & f''''(0) &= 1 \\
 \cos x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \dots = \\
 &= 1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{24}x^4 + 0 - \dots
 \end{aligned}$$

13.3.1 Zjistěte, kde funkce $f(x) = x^3 - 3x - 1$ je rostoucí, klesající, a kde nabývá svého lokálního minima a maxima.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 3x - 1 \\
 f'(x) &= 3x^2 - 3 \quad \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \\
 &3 \cdot (x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \\
 &\text{stacionární body} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1 \\
 f(-2) &= 12 - 3 = 9 > 0 \quad f(0) = -3 < 0 \quad f(2) = 12 - 3 = 9 > 0
 \end{aligned}$$

V intervalu $(-\infty, -1)$ funkce roste, v intervalu $(-1, 1)$ funkce klesá, v intervalu $(1, \infty)$ funkce roste. Bod $x = -1$ je bodem lokálního maxima, bod $x = 1$ bodem lokálního minima.

13.3.2 Zjistěte, kde funkce $f(x) = e^{2x}$ je rostoucí, klesající, a kde nabývá svého lokálního minima a maxima.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{2x} & f'(x) &= 2e^{2x} > 0 \\
 & & f''(x) &> 0 \quad \rightarrow \text{1. derivace je stále kladná}
 \end{aligned}$$

funkce je rostoucí na celém definičním oboru $D(f) = \mathbf{R}$, nemá žádné extrémy

13.3.3 Zjistěte, kde funkce $f(x) = \frac{2}{x+3}$ je rostoucí, klesající, a kde nabývá svého lokálního minima a maxima.

$$f(x) = \frac{2}{x+3} \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} < 0 \quad \text{s výjimkou bodu } x = -3, \text{ kde } f(x) \text{ není definovaná}$$

Funkce je tedy po částech rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$, $(-3, \infty)$

13.4.1 Zjistěte inflexní body, konvexnost a konkávnost funkce $f(x) = (x-1)^3$.

$$f(x) = (x-1)^3, \quad f'(x) = 3(x-1)^2, \quad f''(x) = 6(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6(x-1) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ je inflexní bod}$$

$$f''(0) = -6 < 0, \quad f''(2) = 6 > 0, \text{ tedy na intervalu } (-\infty, 1) \text{ je funkce konkávní (pod tečnou)}$$

na intervalu $(1, \infty)$ je funkce konvexní (nad tečnou)

13.4.2 Zjistěte inflexní body, konvexnost a konkávnost funkce $f(x) = \ln(x-2)$.

$$f(x) = \ln(x-2) \quad f'(x) = \frac{1}{x-2} \quad f''(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

Na $D(f) = (2, \infty)$ je funkce konkávní, inflexi nemá.

13.5.1 Nalezněte tečnu a normálu k funkci $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ v bodě $T(2, ?)$.

$$f(x) = \frac{8}{4+x^2}, \quad f'(x) = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$

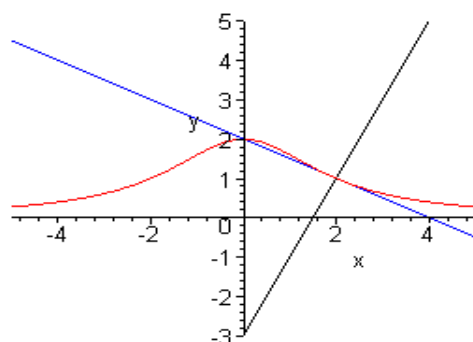
$$f(2) = \frac{8}{4+4} = 1, \quad f'(2) = \frac{-32}{(4+4)^2} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Rovnice tečny} \quad \dots \quad y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\text{Rovnice normály} \quad \dots \quad y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

$$t: \quad y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad x + 2y - 4 = 0$$

$$n: \quad y - 1 = -2 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad 2x - y - 3 = 0$$



13.5.3 Nalezněte tečnu a normálu k funkci zadané parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad \text{v bodě } t=2.$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad x(2) = \frac{6a}{9} = \frac{2a}{3} \quad y(2) = \frac{12a}{9} = \frac{4a}{3}$$

$$\dot{x} = \frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}, \quad \dot{y} = \frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}} = \frac{6at - 3at^4}{3a - 6at^3} = \frac{3at(1-t^3)}{3a(1-2t^3)} = \frac{t(1-t^3)}{(1-2t^3)}$$

$$y'(2) = \frac{14}{15}$$

$$t : 4x - 5y + 4a = 0$$

$$n : 15x + 12y - 26a = 0$$

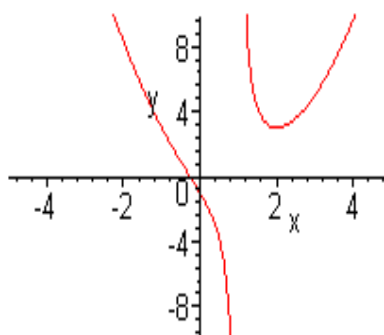
13.6.1 Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{3x} = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

13.6.2 Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

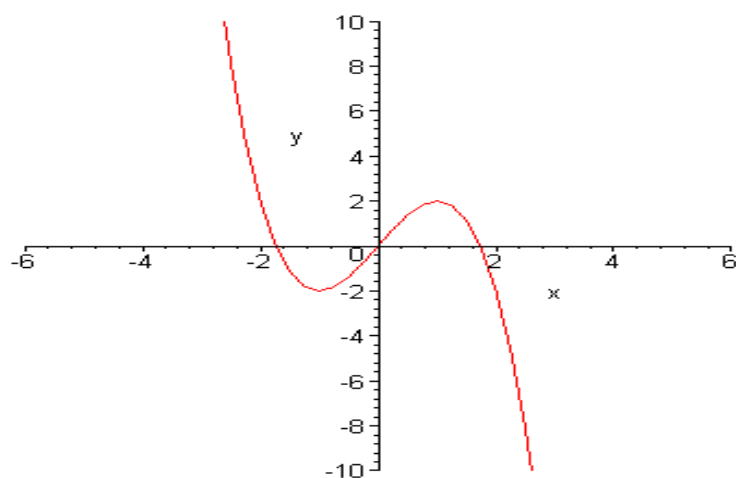
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

13.7.1 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}$



$x \neq 1$, tedy $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 $f'(x) = 2 \frac{(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$, kořeny $x = 2$, lokální minimum
 na intervalech $(-\infty, 1 + \sqrt[3]{-2})$, $(1 + \sqrt[3]{-2}, 1)$, $(1, 2)$ je klesající
 na intervalu $(2, \infty)$ je rostoucí
 $f''(x) = 2 \frac{(x-1)^3 + 2}{(x-1)^3}$, $x \neq 1$. kořeny $x = 1 - \sqrt[3]{2}$, inflexní bod
 konvexní na intervalech $(-\infty, 1 + \sqrt[3]{-2})$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$
 konkávní na intervalu $(1 + \sqrt[3]{-2}, 1)$
 Asymptota bez směrnice: $x=1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

13.7.2 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = -x^3 + 3x$



Funkce je lichá funkce, definovaná v \mathbf{R} .

Nulové body má $x=0$, $x = \pm \sqrt{3}$.

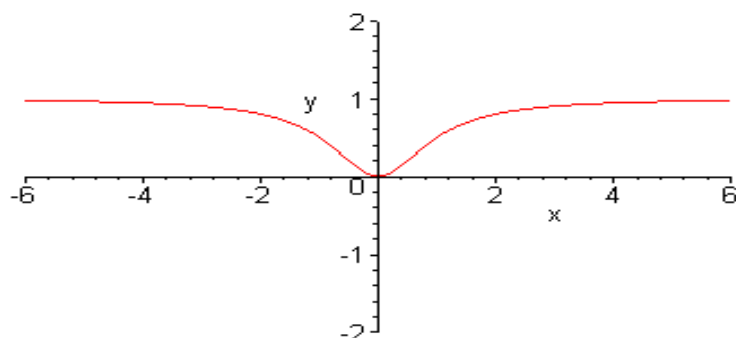
Lokální minimum je $y=-2$ v bodě $x=-1$, lokální maximum je $y=2$ v bodě $x=1$.

Je klesající na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$, rostoucí na intervalu $(-1, 1)$.

Inflexní bod je $x=0$, na $(-\infty, 0)$ je konvexní, na $(0, \infty)$ je konkávní.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,

13.5.4 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$



Všude definovaná, nezáporná, sudá funkce.

Nulové hodnoty nabývá v bodě $x=0$.

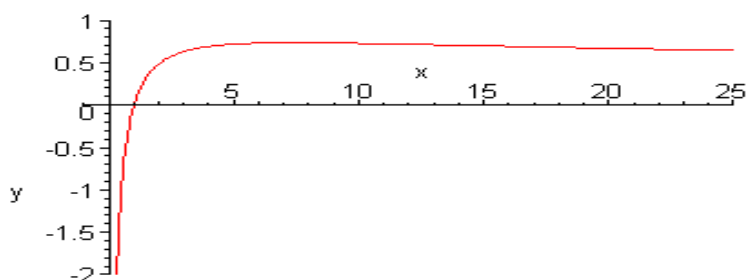
Lokální minimum v bodě $x=0$, na $(-\infty, 0)$ je klesající, na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí.

Inflexní body jsou $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}]$.

V intervalech $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ a $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ je konvexní, v intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ konkávní.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, asymptota se směrnici je tedy $y=1$.

13.5.5 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$



$D(f)=(0, +\infty)$, nulový bod $x=1$.

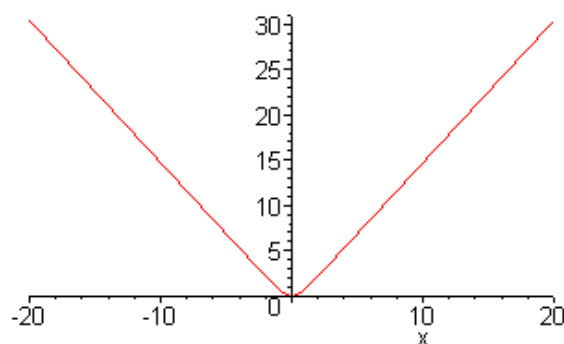
Lokální maximum $y = \frac{2}{e}$ v bodě $x=e^2$, na $(0, e^2)$ je rostoucí, na $(e^2, +\infty)$ klesající.

Inflexní bod $[\frac{8}{e^3}, \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}]$, na intervalu $(0, e^3)$ je konvexní, na intervalu $(e^3, +\infty)$.

Asymptoty: bez směrnice - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, tedy $x=0$,

se směrnici - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, tedy $y=0$.

13.7.4 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x \arctan x$



Funkce je všude definovaná, nezáporná a sudá.

Nulové hodnoty nabývá v bodě $x=0$, minima nabývá v bodě $x=0$,

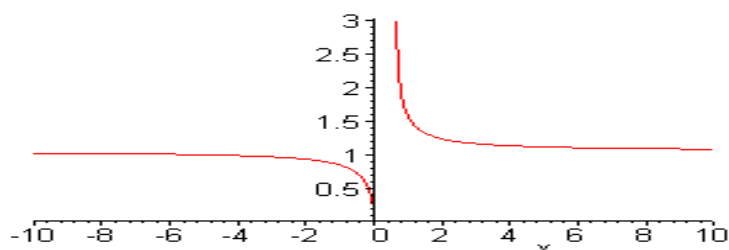
na intervalu $(-\infty, 0)$ je klesající, na intervalu $(0, \infty)$ je rostoucí,

funkce nemá inflexní body a je stále konvexní.

Asymptoty bez směrnice nejsou, asymptoty se směrnicí jsou $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ pro $x \rightarrow -\infty$,

$y = \frac{\pi}{2}x - 1$ pro $x \rightarrow \infty$.

13.5.6 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x \arccos \frac{1 - \cos x}{1 - 2x}$



$D(f) = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$, nulový bod $x=0$.

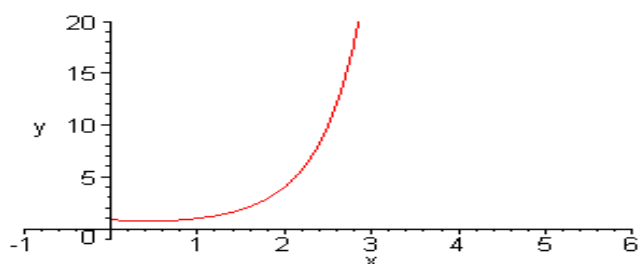
Platí $y'_-(0) = y'_+(\frac{2}{3}) = -\infty$. Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$,

lokální maximum $y=\pi$ v bodě $x=\frac{2}{3}$, na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(\frac{2}{3}, \infty)$ je klesající.

Na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce konkávní a na intervalu $(\frac{2}{3}, \infty)$ je konvexní.

Asymptota se směrnicí $y = \frac{\pi}{3}$ pro $x \rightarrow +\infty$ i pro $x \rightarrow -\infty$.

13.5.7 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^x$



$D(f) = (0, \infty)$, funkce je kladná, nulový bod nemá.

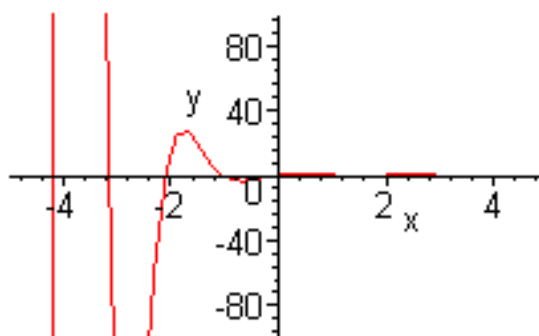
Lokální minimum $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ v bodě $x = \frac{1}{e}$.

Na intervalu $(0, \frac{1}{e})$ je klesající, na intervalu $(\frac{1}{e}, \infty)$ je rostoucí.

Na celém definičním intervalu je konvexní.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

13.5.8 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{-2x} \sin 3x$



$D(f) = (-\infty, \infty)$, spojitá, ani sudá ani lichá.

Nulové body jsou $x = k \frac{\pi}{3}$, kde k je celé číslo.

V bodech, kde $\tan(3x) = \frac{3}{2}$, má lokální extrém, inflexní body v x , pro něž $\tan(3x) = \frac{-12}{5}$.

14. Primitivní funkce

14.1.1 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int (x^5 + \sqrt{x} - x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1) dx = \int x^5 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{4}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int dx =$$

$$\frac{x^6}{6} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + x + C = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + x + C$$

14.1.2 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int (3 \sin x - \frac{\cos x}{5}) dx = 3 \int \sin x dx - \frac{1}{5} \int \cos x dx = -3 \cos x - \frac{1}{5} \sin x + C$$

14.1.3 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

14.1.4 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$$

14.2.1 Integrujte pomocí úpravy integrandu:

$$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = |\text{vydělíme}| = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

14.2.2 Integrujte pomocí úpravy integrandu:

$$\int \frac{5}{1 + \cos 2x} dx = |\text{gon.vzorcel}| = \int \frac{5}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{5}{2} \tan x + C$$

14.2.3 Integrujte pomocí úpravy integrandu:

$$\int \cos^2 x dx = |\text{gon.vzorcel}| = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

14.3.1 Pomocí substituce integrujte:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x-2 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C$$

14.3.2 Pomocí substituce integrujte:

$$\int xe^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

14.3.3. Pomocí substituce integrujte:

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

14.3.4. Pomocí substituce integrujte:

$$\int \sin(5x+3) dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } 5x+3 = t \\ 5 dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + C = -\frac{1}{5} \cos(5x+3) + C$$

14.3.5. Pomocí substituce integrujte:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{sub. } \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t + 2} dt = \int \frac{t^2 - 4 + 3}{t + 2} dt = \int \frac{(t-2)(t+2)}{(t+2)} dt + 3 \int \frac{dt}{t+2} = \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln|\cos x + 2| + C \end{aligned}$$

14.4.1 Pomocí „per partes“ integrujte:

$$\int xe^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} \text{p.p. } u' = e^{2x} & u = \frac{1}{2} e^{2x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

14.4.2 Pomocí „per partes“ integrujte:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} \text{p.p. } v' = 1 & v = x \\ u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

14.4.3 Pomocí opakované „per partes“ integrujte:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} p.p. \ v = x^2 & v' = 2x \\ u' = \sin x & u = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} p.p. \ v = x & v' = 1 \\ u' = \cos x & u = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

14.4.4 Pomocí „per partes“ a převedením na rovnici integrujte:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{ll} p.p. \ u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} p.p. \ u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ 2 \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x) \end{aligned}$$

14.5.1 Integrujte racionální funkci:

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{(3x+2)^3} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{sub. } 3x+2 = t \\ 3dx = dt \\ 5dx = \frac{5}{3} dt \end{array} \right| = \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{5}{3} \int t^{-3} dt = \frac{5}{3} \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{5}{6} \frac{1}{t^2} + C = \\ &= -\frac{5}{6} \frac{1}{(3x+2)^2} + C \end{aligned}$$

14.5.2 Integrujte racionální funkci:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+\frac{4}{5}}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2} \int \frac{(2x+2)-2+\frac{4}{5}}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10} dx + \\ &+ \frac{5}{2} \left(-\frac{6}{5}\right) \int \frac{1}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2} I_1 - 3I_2 = \frac{5}{2} \ln|x^2+x+10| - \arctan \frac{x+1}{3} + C \end{aligned}$$

Integrál I_1 řešíme podle vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+x+10} dx = \ln|x^2+x+10| + C_1$$

Integrál I_2 řešíme úpravou a substitucí

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 9} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 9} dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \\
 &= \int \frac{1}{(9+t^2)} dt = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{t}{3}\right) + C_2 = \frac{1}{3} \arctan \frac{(x+1)}{3} + C_2
 \end{aligned}$$

14.5.3 Pomocí rozkladu na parciální zlomky integrujte racionální funkci:

$$I = \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x} = \int \frac{dx}{6x(x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{1}{2})} = \int \frac{dx}{6x(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{3})} = \int \frac{dx}{x(2x-3)(3x+1)}$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x(2x-3)(3x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{3x+1} = \left\{ A = -\frac{1}{3}, B = \frac{4}{33}, C = \frac{9}{11} \right\} = \\
 &= -\frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{4}{33} \frac{1}{2x-3} + \frac{9}{11} \frac{1}{3x+1}
 \end{aligned}$$

$$I = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} + \frac{4}{33} \int \frac{dx}{2x-3} + \frac{9}{11} \int \frac{dx}{3x+1} = -\frac{1}{3} \ln|x| + \frac{2}{33} \ln|2x-3| + \frac{3}{11} \ln|3x+1| + C$$

14.5.4 Pomocí rozkladu na parciální zlomky integrujte racionální funkci:

$$I = \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx = \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \{A = 2, B = -1, C = -6\} = \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 6 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 2 \ln|x| - \ln|x+1| - 6 \left(\frac{-1}{x+1} \right) + C = \\
 &= 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C
 \end{aligned}$$

14.5.5 Pomocí rozkladu na parciální zlomky integrujte racionální funkci:

$$I = \int \frac{dx}{x^3 + 1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx + N}{x^2 - x + 1} = \left\{ A = \frac{1}{3}, M = -\frac{1}{3}, N = \frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2 - x + 1)}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-4}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1-3}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

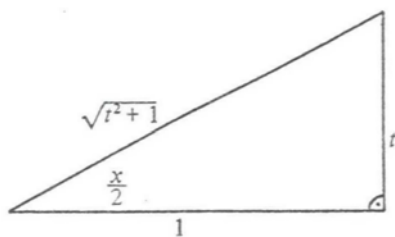
14.6.1 Integrujte složenou racionální funkci z goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t^2 - 1}{t + 2} dt = \int \frac{t^2 - 4 + 3}{t + 2} dt = \int \frac{(t-2)(t+2)}{(t+2)} dt + 3 \int \frac{dx}{t+2} = \int (t-2) dt + 3 \int \frac{dx}{t+2} = \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln|\cos x + 2| + C \end{aligned}$$

14.6.2 Integrujte složenou racionální funkci z goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} &= \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{sub. } \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(2+t)(t^2 - 1)} = \{ \dots \text{pomocí rozkladu na parciální zlomky} \dots \} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{2+t} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{3} \ln|2+t| + \frac{1}{6} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\cos x + 2)^2 (\cos x - 1)}{(\cos x + 1)^3} \right| + C \end{aligned}$$

14.6.3 Univerzální metodou integrujte složenou racionální funkci z goniometrických funkcí:



$$\text{sub. } \tan \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\sin x = \sin\left(2 \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos\left(2 \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{3 \sin x - 4 \cos x} dx = \int \frac{1}{3 \frac{2t}{1+t^2} - 4 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{6t - 4 + 4t^2} dt = \int \frac{1}{3t - 2 + 2t^2} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{(2t-1)(t+2)} = \{ \dots \text{pomocí rozkladu na parciální zlomky} \dots \} =$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{1}{2t-1} dt - \frac{1}{5} \int \frac{1}{t+2} dt = \frac{2}{5} \frac{1}{2} \ln|2t-1| - \frac{1}{5} \ln|t+2| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + C$$

14.7.1 Integrujte iracionální funkci:

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx = \left. \begin{array}{l} \text{sub. } 2x+1 = t \quad x = \frac{t^2-1}{2} \\ 2dx = dt \quad dx = \frac{t}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} \frac{t}{2} dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$= 2 \int dt + 2 \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = 2 \int dt + \{ \dots \text{rozklad na parciální zlomky} \dots \} =$$

$$= 2 \int dt + \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t-1} = 2t + \ln|t+1| - \ln|t-1| + C = 2\sqrt{2x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1} \right| + C$$

14.7.2 Integrujte iracionální funkci:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t^4}}{1+\sqrt[4]{t^{12}}} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3+1} dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3+1} dt = 4 \int t^2 dt - \frac{4}{3} \int \frac{3t^2}{t^3+1} dt = \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln|t^3+1| + C = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \ln|1+\sqrt[4]{x^3}| + C \end{aligned}$$

14.7.3 Integrujte iracionální funkci:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5-(x^2+4x+4)+4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x+2)^2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x+2 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{9-t^2}} dt = \arcsin \frac{t}{3} + C = \\ &= \arcsin \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

14.8.1 Integrujte pomocí goniometrických funkcí iracionální funkci:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x = 3 \cos t \\ dx = -3 \sin t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{9-9 \cos^2 t} (-3) \sin t dt = -9 \int \sqrt{\sin^2 t} \sin t dt = \\ &= -9 \int \sin^2 t dt = -9 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = -9 \left(\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = -\frac{9}{2} \arccos \frac{x}{3} + \frac{9}{4} \sin(2 \arccos \frac{x}{3}) + C = \\ &= -\frac{9}{2} \arccos \frac{x}{3} + \frac{9}{4} 2 \sin \arccos \frac{x}{3} \arccos \cos \frac{x}{3} + C = -\frac{9}{2} \arccos \frac{x}{3} + \frac{3x}{2} \sqrt{1-(\cos \arccos \frac{x}{3})^2} + C = \\ &= -\frac{9}{2} \arccos \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + C \end{aligned}$$

14.8.2 Integrujte pomocí goniometrických funkcí iracionální funkci:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{4x+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+4x+4)-4}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}} = \\
 &= \left. \begin{array}{l} \text{sub. } x+2 = \frac{2}{\cos t} \\ dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt \\ t = \arccos \frac{2}{x+2} \end{array} \right| = \int \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}} \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{2\sqrt{1-\cos^2 t}} \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt = \\
 &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t} dt = \left. \text{sub. } \sin t = u \right|_{\cos t dt = du} = \int \frac{du}{1-u^2} = \{ \dots \text{rozklad na parc. zlomky} \dots \} = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \arccos \frac{2}{x+2}}{1-\sin \arccos \frac{2}{x+2}} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{x+2}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{2}{x+2}\right)^2}} + C = \{ \dots \text{úpravou} \dots \} = \\
 &= \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x}) + C
 \end{aligned}$$

15. Riemannův určitý integrál

15.1.1 Metodou „per partes“ vypočtete hodnotu určitého integrálu:

$$\int_0^1 \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} p.p. \ u' = 1 & u = x \\ v = \ln(x+1) & v' = \frac{1}{x+1} \end{array} \right| = [x \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx =$$

$$= [1 \ln 2 - 0 \ln 1] - \left\{ \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \right\} = \ln 2 - [x]_0^1 + [\ln(x+1)]_0^1 = 2 \ln 2 - 1$$

15.1.2 Metodou substituční vypočtete hodnotu určitého integrálu:

(pomocí transformací mezi)

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1 + \ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int_{-1}^3 (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^3 = 3 + \frac{9}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 8$$

x	e^{-1}	e^3
t	-1	3

15.1.3 Metodou substituční vypočtete hodnotu určitého integrálu:

(pomocí dosazení do primitivní funkce)

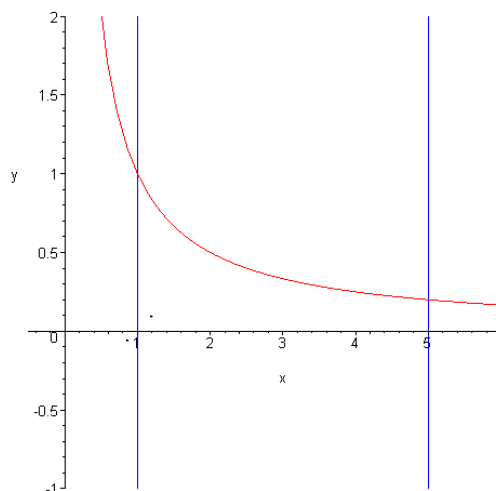
$$\int_4^8 \frac{x-1}{x^2-2x-3} dx = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{2x-2}{x^2-2x-3} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2-2x-3|]_4^8 = \frac{1}{2} (\ln 45 - \ln 5) = \ln 3$$

Výpočet *primitivní funkce*:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x-3} dx = \left| \begin{array}{l} \text{sub. } x^2-2x-3 = t \\ (2x-2)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-2x-3| + C$$

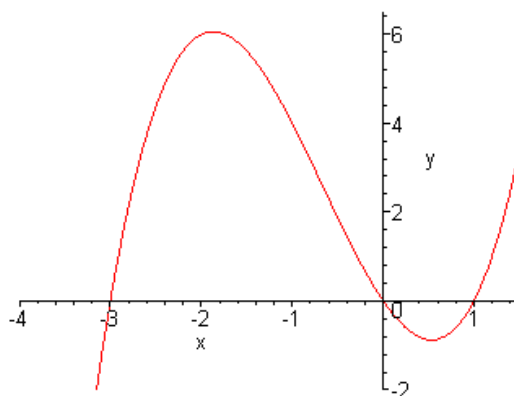
16. Aplikace Riemannova integrálu

16.1.1 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkou $y = \frac{1}{x}$, osou x a přímkami $x=1$, $x=5$



$$P = \int_a^b f(x) dx = \int_1^5 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

16.1.2 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkou $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ a osou x



Průsečíky s osou x jsou :

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x+3)(x-1) = 0$$

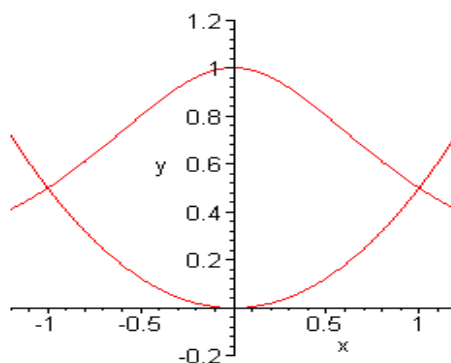
$$x = -3, \quad x = 0, \quad x = 1$$

v intervalu $\langle -3, 0 \rangle$ je funkce nezáporná

v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je funkce záporná

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-3}^0 (x^3 + 2x^2 - 3x) dx + \left| \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 3x) dx \right| = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 + \\
 &+ \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \right| = \left[0 - \frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2} \right] + \left| \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 0 \right] \right| = \frac{45}{4} + \left| -\frac{7}{12} \right| = \\
 &= \frac{135 + 7}{12} = \frac{142}{12} = \frac{71}{6}
 \end{aligned}$$

16.1.3 Vypočítejte obsah obrazce omezeného křivkami $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$



Vypočteme souřadnice průsečíků grafů:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$\text{sub. } z = x^2 \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0$$

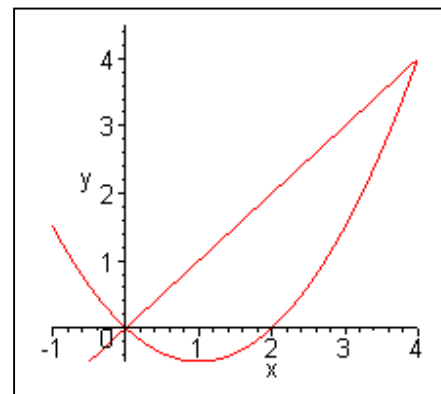
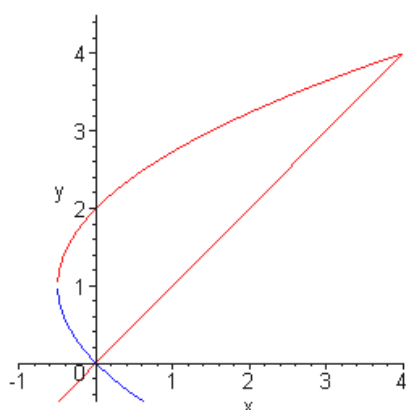
$$(z+2)(z-1) = 0$$

$$z_1 = -2 \Rightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R}, \quad z_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$$

Integrujeme v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, kde $\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}x^2$. Proto

$$\begin{aligned}
 P &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\arctan x - \frac{1}{6}x^3 \right]_{-1}^1 = \\
 &= \arctan 1 - \frac{1}{6} - \arctan(-1) - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

16.1.4 Vypočtete obsah obrazce omezeného křivkami $(y-1)^2 = 2x+1$, $x-y=0$



Záměnou závislosti proměnných při průsečících $y=0$ a $y=4$ obdržíme:

$$P = \int_0^4 \left(y - \frac{1}{2}y^2 + y \right) dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^4 = 16 - \frac{64}{6} = \frac{16}{3}$$

16.1.5 Vypočtete obsah P kruhu o poloměru r

Kruh je obrazec symetrický dle osy x , proto vezmeme dvakrát obsah horní poloviny

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y_1 = +\sqrt{r^2 - x^2}, y_2 = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$P = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} \text{sub. } x = r \cos t \\ dx = -r \sin t dt \\ \begin{array}{|l} \boxed{x} \\ \boxed{t} \end{array} \begin{array}{|l} -r \\ \pi \end{array} \begin{array}{|l} r \\ 0 \end{array} \end{array} \right| = 2 \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} (-r \sin t) dt = 2r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= 2r^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2r^2 \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi} = 2r^2 \frac{\pi}{2} = \pi r^2$$

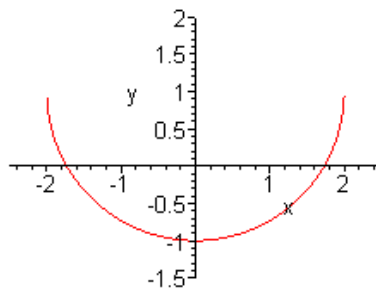
16.1.6 Vypočtete obsah obrazce ohraničeného křivkami, které jsou dány parametrickými rovnicemi

$$x = 2t - t^2 \quad y = 2t^2 - t^3$$

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \dot{\varphi}(t) dt = \left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) = 2t - t^2 \quad dx = \dot{\varphi}(t) dt = (2 - 2t) dt \\ y = \psi(t) = 2t^2 - t^3 \quad t \in \langle 0, 2 \rangle \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^2 (2t^2 - t^3)(2 - 2t) dt = 2 \int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2) dt = 2 \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right]_0^2 = \frac{112}{15}$$

- 16.2.1 Vypočítejte délku oblouku rovinné křivky, který má křivka o rovnici $x^2 + (y-1)^2 = 4$ pod osou x



rovnice dolní půlkružnice je tvaru $y=1-\sqrt{4-x^2}$ $y'^2 = \frac{x^2}{4-x^2}$

průsečíky s osou x jsou $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = +\sqrt{3}$

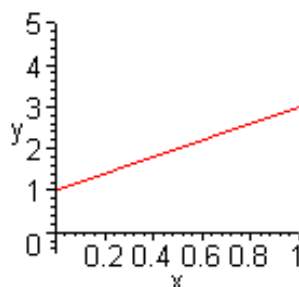
$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}} dx = 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{4-x^2}} dx =$$

sub.	$x = 2 \cos t$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
	$dx = -2 \sin t dt$				
x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
t	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

$$= 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{-2 \sin t}{\sqrt{4-4 \cos^2 t}} \right) dt = 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin t}{\sin t} \right) dt = 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dt = 2 \left[t \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2 \left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{4}{3} \pi$$

- 16.2.2 Vypočítejte délku oblouku rovinné křivky, který má křivka o parametrických rovnicích $x=t$ $y=1+2t$ pro $t \in \langle 0,1 \rangle$



$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) = t \quad \dot{\varphi}(t) = 1 \\ y = \psi(t) = 1 + 2t \quad \dot{\psi}(t) = 2 \end{array} \right|_{t \in \langle 0,1 \rangle} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4} dt = \sqrt{5} \int_0^1 dt = \sqrt{5} [x]_0^1 = \sqrt{5} (1-0) = \sqrt{5}$$

- 16.3.1 Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce P kolem osy x. Obrazec P je omezen křivkami $y^2 = 2px$, $x = 3$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^3 2px dx = 2\pi p \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \pi p(9 - 0) = 9\pi p$$

- 16.3.2 Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce P kolem osy x. Obrazec P je omezen křivkami $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x} \right)^2 dx = 16\pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = 16\pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = -16\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 12\pi$$

- 16.4.1 Vypočtete obsah rotační plochy (plášť rotačního tělesa) vzniklého rotací rovinného obrazce P omezeného přímkami $x = 1$, $x = 2$, osou $y = 0$ a grafem funkce $y = \sqrt{9 - x^2}$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = f(x) = \sqrt{9 - x^2} \\ y' = f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \end{array} \right. \quad x \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{3\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{9 - x^2}} dx = 6\pi \int_1^2 dx = 6\pi [x]_1^2 = 6\pi(2 - 1) = 6\pi$$

