Cvičení č. 5

LU rozklad, řešení soustav lineárních rovnic LU rozkladem, výpočet inverzní matice LU rozkladem.

LU rozklad.

Definice: Permutační maticí nazýváme takovou matici, která vznikla z jednotkové matice postupnou vzájemnou záměnou sloupců.

Příklad:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}s_1\leftrightarrow s_2\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}s_1\leftrightarrow s_3\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Platí: $P^{-1}=P^T$

Definice: Čtvercová matice $L=(l_{ij})$ se nazývá dolní trojúhelníková jestliže $l_{ij}=0$ pro $\forall i<j$. Matice $U=(u_{ij})$ se nazývá horní trojúhelníková jestliže $u_{ij}=0$ pro $\forall i>j$.

Příklad:

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&3&-1\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Věta:
Nechť je dána čtvercová matice *A* řádu *n*. Pak existuje permutační matice *P* řádu *n*, dolní trojúhelníková matice *L* řádu *n* a horní trojúhelníková matice *U* řádu *n* tak, že $AP=LU$.

Postup nalezení LU rozkladu:

1. $[A\,|\,I]\xrightarrow{\text{El.op.}}[U\,|\,\tilde{L}]$. $\tilde{L}$ je dolní trojúhelníková a platí $\tilde{L}A=U$
2. $L=\tilde{L}^{-1}$ a tedy $A=LU$

V kroku 1 i 2 nesmíme zaměňovat řádky ani přičítat násobek řádku k řádku s nižším indexem. Pokud bychom toto pravidlo porušili pak by matice $\tilde{L}$ ani matice L nebyly dolní trojúhelníkové.

Příklad: Nalezněte LU rozklad matice

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&1&1\\-2&3&2\end{pmatrix}$$

1. Nalezení matice U

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +(-2)r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +(-3)r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Výpočet $\tilde{L}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ +(-7)r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = LU,\ P = I,\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Poznámka:

V kroku 1 může nastat situace, kdy některý prvek na diagonále je nulový a vzhledem k tomu, že nesmíme zaměňovat řádky ani přičítat násobky řádků pod tímto prvkem, tak není možné dale pokračovat v úpravě na horní trojúhelníkovou matici. V tomto případě však upravíme matici A tak, že zaměníme dva sloupce tak, aby na místě diagonálního nulového prvku byl prvek nenulový. Tímto získáváme taktéž permutační matici P tak, že stejnou operaci provedeme na jednotkové matici.

<u>Řešení soustav lineárních rovnic pomocí LU rozkladu</u>

$Ax = b, A$ je regulární řádu n a $AP = LU$

$Ax = b \Leftrightarrow AIx = b \Leftrightarrow A(PP^{-1})x = b \Leftrightarrow (AP)y = b \Leftrightarrow (LU)y = b \Leftrightarrow L(Uy) = b \Leftrightarrow Lz = b$

kde $Uy = z$ a $x = Py$.

$$Ax = b \equiv \begin{cases} 1.\ Lz = \mathrm{b} \\ 2.\ Uy = z \\ 3.\ x = Py \end{cases}$$

Příklad: LU rozkladem řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Nalezení matice U

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) s_1 \leftrightarrow s_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ +4r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +(-5)r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right), \qquad U = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} s_1 \leftrightarrow s_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

2. Výpočet $\tilde{L}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +5r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Řešení soustavy

$Lz = b$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ -z_1 + z_2 &= 0 \\ -4z_1 + 5z_2 + z_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -1 + z_2 &= 0 \\ -4 + 5z_2 + z_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z_2 &= 1 \\ z_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Uy = z$:

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &= 1 \\ y_2 + y_3 &= 1 \\ -4y_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &= 1 \\ y_2 + y_3 &= 1 \\ y_3 &= \tfrac{1}{4} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2} \\ y_2 &= \tfrac{3}{4} \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$x = Py$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Řešením je $x_1 = 1/4$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 1/2$

$$\text{Zk: } Ax = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Výpočet inverzní matice pomocí LU rozkladu</u>

$$AP = LU \Rightarrow A = LUP^{-1}$$

$$A^{-1} = (LUP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}U^{-1}L^{-1} = PU^{-1}L^{-1} = PU^{-1}\tilde{L}$$

Příklad: Pomocí LU rozkladu nalezněte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A^{-1} = PU^{-1}\tilde{L}$$

1. Nalezení matic $U, \tilde{L}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +3r_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Výpočet U^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -3r_3 \\ +3r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot \frac{1}{4} \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{-1} = U^{-1}\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$